勾股定理證明-A084

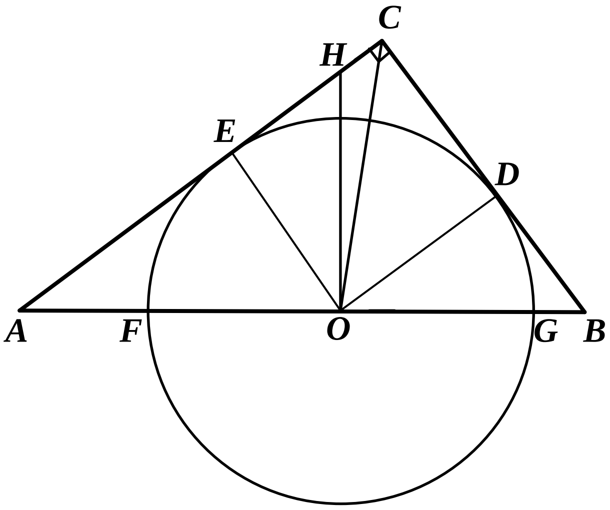
【作輔助圖】

1. 作 $\angle ACB$ 之平分線，與 $\overline{AB}$ 相交於 O 點。

2. 過 O 點分別作 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 之垂線，與 $\overline{BC}$ 交於 D 點，與 $\overline{AC}$ 交於 E 點。

3. 以 O 為圓心，$\overline{OD}$ 為半徑畫圓，與 $\overline{AC}$ 相切於 E 點，與 $\overline{AB}$ 交於 F 點, G 點。

4. 過 O 作 $\overline{AB}$ 之垂線，與 $\overline{AC}$ 交於 H 點。



【求證過程】

作出一圓與直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BC}$ 相切後，先證明四邊形 $CDOE$ 為正方形，再利用「圓的外冪性質」與相似三角形的「對應邊成比例」性質，推得三角形的邊長關係等式，再將等式作化簡整理，來推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形 $CDOE$ 為正方形：

   由作圖的垂直關係可知四邊形 $CDOE$ 為長方形，且 $\overline{CO}$ 平分 $\angle ACB$, 所以 $\overline{OD}=\overline{OE}$,

   因此

   $$\text{四邊形 } CDOE \text{ 為正方形.}$$

   可得到

   $$\overline{OE}=\overline{CE}=\overline{CD}=\overline{DO}=\overline{OF}=\overline{OG}.$$

2. 利用圓的外冪性質，推出三角形的邊長關係：

   因為 $\overline{OE}\perp\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 和圓 O 相交於 F 點, G 點，根據圓的外冪性質可得到

$$
\begin{aligned}
\overline{AE}^2 &= \overline{AF} \times \overline{AG} \\
&= (\overline{AO} - \overline{OF}) \times (\overline{AO} + \overline{OG}) \\
&= \overline{AO}^2 - \overline{OF}^2 \\
&= \overline{AO}^2 - \overline{CE}^2 \text{......(1)}
\end{aligned}
$$

同理，$\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{CD}^2$......(2)

3. 先證明三角形 AOH 與三角形 AEO 相似，再推出三角形的邊長關係：

因為 $\angle A = \angle A, \angle AOH = \angle AEO = 90°$，所以

$$\Delta AOH \sim \Delta AEO \text{ (AA 相似).}$$

故

$$\overline{AH} : \overline{AO} = \overline{OH} : \overline{OE},$$
$$\overline{AH} \times \overline{OE} = \overline{AO} \times \overline{OH}.$$

4. 先證明三角形 OEH 與三角形 ODB 全等，再推出三角形的邊長關係：

因為 $\overline{OH} = \overline{OB}$ (補充)，$\overline{OE} = \overline{OD}$，$\angle OEH = \angle ODB = 90°$，所以

$$\Delta OEH \sim \Delta ODB \text{ (RHS 全等).}$$

故

$$\overline{EH} = \overline{DB},$$
$$\overline{AH} = \overline{AE} + \overline{EH} = \overline{AE} + \overline{DB}.$$

5. 將第 4 點的等式代入第 3 點的等式化簡整理，推出三角形的邊長關係：

將 $\overline{AH} = \overline{AE} + \overline{DB}$ 代入 $\overline{AH} \times \overline{OE} = \overline{AO} \times \overline{OH}$，可得

$$
\begin{aligned}
&(\overline{AE} + \overline{DB}) \times \overline{OE} = \overline{AO} \times \overline{OH} \\
&\overline{AE} \times \overline{OE} + \overline{DB} \times \overline{OE} = \overline{AO} \times \overline{OH} \\
&\overline{AE} \times \overline{CE} + \overline{DB} \times \overline{CD} = \overline{AO} \times \overline{OB} \text{......(3)}
\end{aligned}
$$

6. 將(1), (2)和(3)的等式化簡整理，推出勾股定理的相關式：

將 $(1) + (2) + (3) \times 2$ 可得

$$\overline{AE}^2 + \overline{BD}^2 + 2 \times \overline{AE} \times \overline{CE} + 2 \times \overline{DB} \times \overline{CD} = \overline{AO}^2 - \overline{CE}^2 + \overline{BO}^2 - \overline{CD}^2 + 2 \times \overline{AO} \times \overline{OB}$$
$$\overline{AE}^2 + 2 \times \overline{AE} \times \overline{CE} + \overline{CE}^2 + \overline{BD}^2 + 2 \times \overline{DB} \times \overline{CD} + \overline{CD}^2 = \overline{AO}^2 + 2 \times \overline{AO} \times \overline{OB} + \overline{BO}^2$$

$$(\overline{AE} + \overline{CE})^2 + (\overline{BD} + \overline{CD})^2 = (\overline{AO} + \overline{OB})^2$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2.$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *4*(3), 80.
2. 心得：此證明利用三角形的相似性質以及圓的外冪性質，來找出一些等式，再將等式整理後，推得勾股定理的關係式，而此證明的過程十分繁雜，學生可能不易理解。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				

4. 補充：此證明是假設$\overline{OH} = \overline{OB}$的特殊情況。