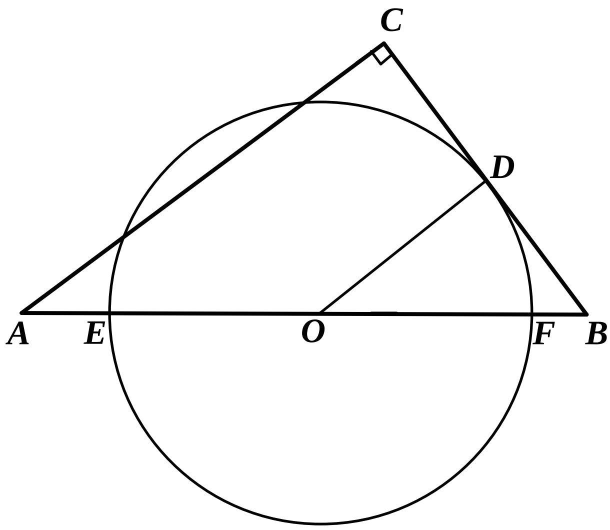
勾股定理證明-A083

【作輔助圖】

1. 在 $\overline{BC}$ 上取一點 D ，過 D 點作 $\overline{BC}$ 之垂線，與 $\overline{AB}$ 交於 O 點。

2. 以 O 為圓心，$\overline{OD}$ 為半徑畫圓，與 $\overline{AB}$ 相交於 E 點，F 點。



【求證過程】

作出一圓與直角三角形 ABC 的 $\overline{BC}$ 相切後，先利用「圓的外冪性質」推得 $\overline{BD}$ 與 $\overline{BE}$，$\overline{BF}$ 的關係式，再利用「平行線截比例線段」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 利用圓的外冪性質，來推出三角形的邊長關係：

   因為 $\overline{OD} \perp \overline{BC}$，$\overline{BE}$ 和圓 O 相交於 E 點，F 點，根據圓的外冪性質可得

$$\overline{BD}^2 = \overline{BE} \times \overline{BF}.$$

2. 將圓 O 的半徑以 r 表示，並利用上述式子，推得 $\overline{BD}$ 與 $\overline{BO}$ 的關係式：

   設 $\overline{OD} = r$ ，將上式整理可得

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{BE} \times \overline{BF} \\ &= (\overline{BO} + \overline{OE}) \times (\overline{BO} - \overline{OF}) \\ &= (\overline{BO} + r) \times (\overline{BO} - r) \\ &= \overline{BO}^2 - r^2.\end{aligned}$$

3. 利用平行線截比例線段性質，分別推得 $\overline{BD}$，$\overline{BO}$ 與 r 的關係式：

因為 $\overline{OD} // \overline{AC}$，所以

$$\overline{BD}:\overline{BC}=\overline{OD}:\overline{AC},$$

即

$$\overline{BD}=\frac{\overline{BC}\times\overline{OD}}{\overline{AC}}=\frac{ar}{b}.$$

同理，

$$\overline{BO}:\overline{AB}=\overline{OD}:\overline{AC},$$

$$\overline{BO}=\frac{\overline{AB}\times\overline{OD}}{\overline{AC}}=\frac{cr}{b}.$$

4. 將第 3 點的結果，代入第 2 點的等式，推出勾股定理的關係式：

將 $\overline{BD}=\frac{ar}{b}$，$\overline{BO}=\frac{cr}{b}$，代入 $\overline{BD}^2=\overline{BO}^2-r^2$，可得到

$$\left(\frac{ar}{b}\right)^2=\left(\frac{cr}{b}\right)^2-r^2,$$

$$\frac{a^2r^2}{b^2}=\frac{c^2r^2}{b^2}-r^2,$$

$$a^2r^2=c^2r^2-b^2r^2,$$

$$a^2=c^2-b^2.$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *3*(3), 229.
2. 心得：此證明利用三角形的相似性質以及平行線截比例線段，來找出一些等式，再將等式整理後，推得勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：此證明用來推得勾股定理的等式，與 A081 所使用的是相同的。