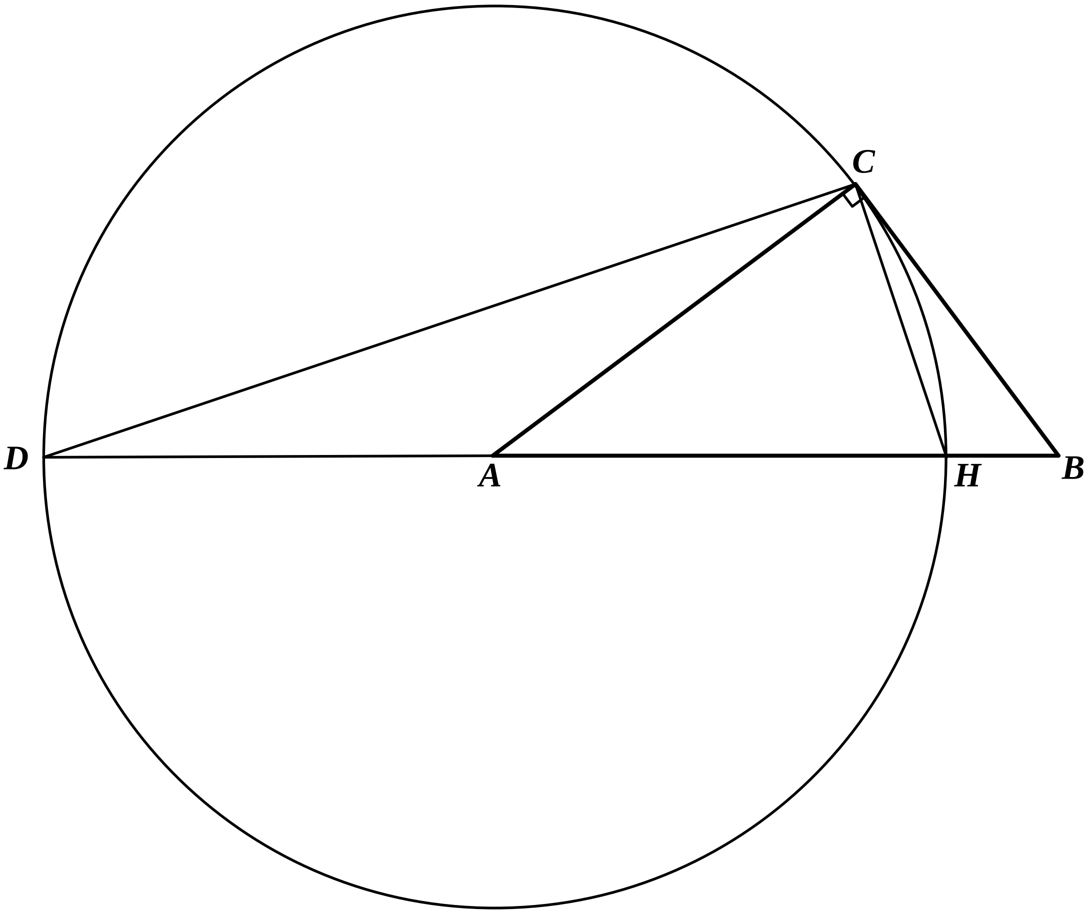
勾股定理證明-A082

【作輔助圖】

1. 以 A 點為圓心，$\overline{AC}$ 為半徑畫圓，與 $\overline{AB}$ 相交於 H 點。

2. 延長 $\overline{AB}$，與圓 A 相交於 D 點。

3. 連接 $\overline{CD}$，$\overline{CH}$。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 為半徑畫圓，並作出輔助線後，先證明圖中的相似三角形，利用「對應邊成比例」的性質得到 $\overline{BC}$ 與 $\overline{BH}$，$\overline{BD}$ 的比例式，進而推出勾股定理。

1. 證明三角形 BHC 與三角形 BCD 相似：

   因為 $\angle B = \angle B$，$\angle D = \angle BCH = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CH}$，所以

$$\Delta BHC \sim \Delta BCD \text{ (AA 相似)}.$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 BHC 與三角形 BCD 相似可知：$\overline{BH}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{BD}$，整理得

$$\overline{BC}^2=\overline{BH}\times\overline{BD}.$$

3. 將上述比例式的邊長代換成三角形 ABC 的邊長，推出勾股定理的關係式：

已知 $\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則 $\overline{BH}=\overline{AB}-\overline{AH}=c-b,\ \ \overline{BD}=\overline{AB}+\overline{AD}=c+b$，

代入 $\overline{BC}^2=\overline{BH}\times\overline{BD}$，得到

$$a^2=(c-b)\times(c+b),$$

$$a^2=c^2-b^2.$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明記載於：
   (1) J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 39). Leipz.: Friese.
   (2) Heath’s Mathematical Monographs, 1900, No. 1, p. 22, proof VII.
   (3) Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 3*(3), 229.
   (4) Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 89). Amsterdam: A. Versluys.
   (5) J. M. Richardson (1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly,* 2(3), 11.
2. 心得：此證明利用三角形的相似性質，來找出一些等式，再將等式整理後，推得勾股定理的關係式，此證明的過程簡單容易，學生應該比較可以理解。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	