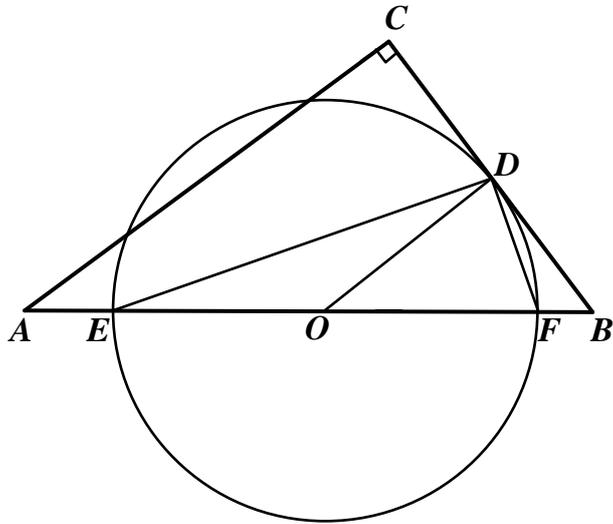


勾股定理證明-A081

【作輔助圖】

1. 在 \overline{BC} 上取一點 D ，過 D 點作 \overline{BC} 之垂線，與 \overline{AB} 交於 O 點。
2. 以 O 為圓心， \overline{OD} 為半徑畫圓，與 \overline{AB} 交於 E 點， F 點。
3. 連接 \overline{DE} ， \overline{DF} 。



【求證過程】

作出一圓與直角三角形 ABC 的 \overline{BC} 相切後，先證明圖中的相似三角形，利用「對應邊成比例」的性質推得 \overline{BD} 為 \overline{BE} 和 \overline{BF} 的比例中項，再利用「平行線截比例線段」的性質，來推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 BDF 與三角形 BED 相似，推得邊長關係：

因為 $\angle B = \angle B$ ， $\angle BDF = \angle BED = \frac{1}{2} \angle EDF$ ，所以

$$\triangle BDF \sim \triangle BED \text{ (AA 相似).}$$

2. 利用第 1 點的三角形相似性質，推出三角形的邊長關係：

由三角形 BDF 與三角形 BED 相似可知： $\overline{BD} : \overline{BE} = \overline{BF} : \overline{BD}$ ，整理得

$$\overline{BD}^2 = \overline{BE} \times \overline{BF}.$$

3. 將圓 O 的半徑以 r 表示，代入第 2 點的等式，推得 \overline{BD} 與 \overline{BO} 的關係式：

設 $\overline{OD} = r$ ，將上式整理可得

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{BE} \times \overline{BF} \\ &= (\overline{BO} + \overline{OE}) \times (\overline{BO} - \overline{OF}) \\ &= (\overline{BO} + r) \times (\overline{BO} - r) \\ &= \overline{BO}^2 - r^2.\end{aligned}$$

4. 利用平行線截比例線段性質，分別推得 \overline{BD} ， \overline{BO} 與 r 的關係式：

因為 $\overline{OD} \parallel \overline{AC}$ ，所以

$$\overline{BD} : \overline{BC} = \overline{OD} : \overline{AC},$$

即

$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC} \times \overline{OD}}{\overline{AC}} = \frac{ar}{b}.$$

同理，

$$\overline{BO} : \overline{AB} = \overline{OD} : \overline{AC},$$

$$\overline{BO} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OD}}{\overline{AC}} = \frac{cr}{b}.$$

5. 將第 4 點的結果，代入第 3 點的等式，推出勾股定理的關係式：

將 $\overline{BD} = \frac{ar}{b}$ ， $\overline{BO} = \frac{cr}{b}$ ，代入 $\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 - r^2$ ，可得到

$$\left(\frac{ar}{b}\right)^2 = \left(\frac{cr}{b}\right)^2 - r^2,$$

$$\frac{a^2 r^2}{b^2} = \frac{c^2 r^2}{b^2} - r^2,$$

$$a^2 r^2 = c^2 r^2 - b^2 r^2,$$

$$a^2 = c^2 - b^2.$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead (1896). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 3(3), 229.

2. 心得：此證明利用三角形的相似性質以及平行線截比例線段性質，來找出一些等式，再將等式整理後，推得勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		