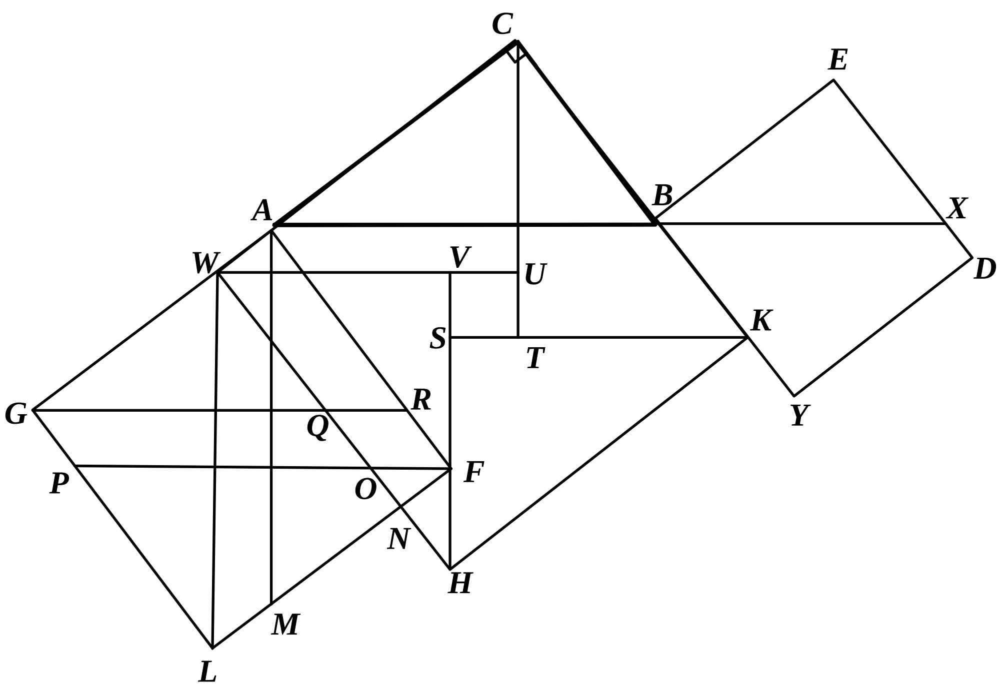
勾股定理證明-G208

【作輔助圖】

1. 延長$\overline{CA}$至W點使得$\overline{CW}=\overline{AB}$，作正方形$CWHK$.
2. 延長$\overline{BK}$至Y點使得$\overline{BY}=\overline{BC}$，作正方形$BYDE$.
3. 延長$\overline{AW}$至G點使得$\overline{AG}=\overline{CA}$，作正方形$AGLF$，$\overline{LF}$交$\overline{WH}$於$N$點。
4. 過A點作垂直$\overline{AB}$的直線，交$\overline{LF}$於M點，連$\overline{WL}$.
5. 過F點作平行$\overline{AB}$的直線，交$\overline{WH}$於O點，交$\overline{GL}$於P點。
6. 過G點作平行$\overline{AB}$的直線，交$\overline{WH}$於Q點，交$\overline{AF}$於R點。
7. 過W點作平行$\overline{AB}$的直線，過C點作垂直$\overline{AB}$的直線，兩直線相交於U點。
8. 直線HF與$\overline{WU}$交於V點。
9. 過K點作平行$\overline{AB}$的直線，交$\overline{VH}$於S點，交直線CU於T點。
10. 直線AB與$\overline{ED}$相交於X點。



【求證過程】

證明正方形$CWHK$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$BYDE$的面積加上正方形$AGLF$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形CKT、三角形KHS、三角形HWV、三角形WCU皆與三角形ABC全等：

   設$\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知$x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$。因為

   $\angle TCK = 90^{\circ} - \angle CBA = x^{\circ} = \angle CAB$, $\angle CTK = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{CK} = \overline{AB}$，所以

   $$\Delta CKT \cong \Delta ABC \text{ (AAS)},$$

   同理可證$\Delta KHS \cong \Delta ABC$, $\Delta HWV \cong \Delta ABC$, $\Delta WCU \cong \Delta ABC$，故

   $$\Delta CKT、\Delta KHS、\Delta HWV \text{皆與} \Delta ABC \text{全等。}$$

2. 證明三角形CKT與三角形GRA全等：

   因為$\overline{GR} // \overline{AB}$, $\overline{AG} // \overline{CA}$，且$\angle AGR$為銳角，所以$\angle AGR = \angle CAB$，又

   $\angle GAR = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{AG} = b = \overline{CA}$，因此

   $$\Delta GRA \cong \Delta ABC \text{ (ASA).}$$

   又由第 1 點知$\Delta CKT \cong \Delta ABC$，故

   $$\Delta CKT \cong \Delta GRA.$$

3. 證明三角形WCU與三角形LWG全等：

   因為$\overline{WL} // \overline{CT}$, $\overline{WG} // \overline{CA}$，且$\angle LWG$為銳角，所以

   $\angle LWG = \angle TCA = 90^{\circ} - \angle CAB = y^{\circ} = \angle CBA$，又$\angle LGW = 90^{\circ} = \angle ACB$,

   $\overline{LG} = b = \overline{AC}$，因此

   $$\Delta LWG \cong \Delta ABC \text{ (AAS).}$$

   又由第 1 點知$\Delta WCU \cong \Delta ABC$，故

   $$\Delta WCU \cong \Delta LWG.$$

4. 證明三角形GQW與三角形BXE全等：

   因為$\overline{BX} // \overline{AB}$, $\overline{EB} // \overline{CA}$，且$\angle EBX$為銳角，所以$\angle EBX = \angle CAB$。因為

   $\Delta GRA \cong \Delta ABC$，所以$\angle AGR = \angle CAB$，可推得

   $$\angle WGQ = \angle AGR = \angle CAB = \angle EBX .$$

   因為$\Delta LWG \cong \Delta ABC$，所以$\overline{WG} = \overline{BC} = a$。因為$\angle WGQ = \angle EBX$, $\overline{WG} = a = \overline{EB}$,

   $\angle GWQ = 90^{\circ} = \angle BEX$，所以

$$\Delta GQW \cong \Delta BXE \text{ (ASA).}$$

5. 證明三角形 KHS 與三角形 FPL 全等：

   因為 $\overline{PF} // \overline{GR}$, $\overline{GP} // \overline{RF}$，所以四邊形 $GRFP$ 為平行四邊形，可推得 $\overline{PF} = \overline{GR} = \overline{AB}$。

   又因為 $\overline{PL} = b = \overline{AC}$, $\angle FLP = 90^\circ = \angle ACB$，所以

   $$\Delta FLP \cong \Delta ABC \text{ (RHS).}$$

   又由第 1 點知 $\Delta KHS \cong \Delta ABC$，故

   $$\Delta KHS \cong \Delta FLP.$$

6. 證明四邊形 $PONL$ 與四邊形 $BXDY$ 全等：

   因為 $\overline{PO} // \overline{BX}$, $\overline{PL} // \overline{BY}$，且 $\angle OPL$, $\angle XBY$ 皆為銳角，所以 $\angle OPL = \angle XBY$。又

   $\angle ONL = 90^\circ = \angle XDY$, $\angle PLN = 90^\circ = \angle BYD$，可推得

   $$\text{四邊形}PONL\text{與四邊形}BXDY\text{的四個內角都對應相等。}$$

   因為 $\overline{PO} // \overline{GQ}$, $\overline{GP} // \overline{QO}$，所以四邊形 $GQFP$ 為平行四邊形，可推得 $\overline{PO} = \overline{GQ}$，又

   因為 $\Delta GQW \cong \Delta BXE$，所以 $\overline{GQ} = \overline{BX}$，可推得

   $$\overline{PO} = \overline{GQ} = \overline{BX}.$$

   又因為 $\Delta FLP \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{PL} = \overline{CB} = a = \overline{BY}$，故

   $$\text{四邊形}PONL \cong \text{四邊形}BXDY.$$

7. 證明三角形 HWV 與三角形 WLN 全等：

   因為 $\Delta LWG \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{WL} = \overline{BA} = c$，又因為 $\overline{NW} = \overline{FA} = b = \overline{CA}$,

   $\angle WNL = 90^\circ = \angle ACB$，所以

   $$\Delta WLN \cong \Delta ABC \text{ (RHS).}$$

   又由第 1 點知 $\Delta HWV \cong \Delta ABC$，故

   $$\Delta HWV \cong \Delta WLN.$$

8. 證明四邊形 $VUTS$ 的面積與四邊形 $QRFO$ 的面積相等：

   因為四邊形 $VUTS$ 的個內角都是直角，且 $\overline{VU} = \overline{WU} - \overline{WV} = b - a = \overline{UT} = \overline{TS} = \overline{VS}$，

   所以

   $$\text{四邊形}VUTS\text{是正方形且面積為}(b-a)^2.$$

   因為 $\overline{QR} // \overline{OF}$, $\overline{QO} // \overline{SF}$，所以四邊形 $QRFO$ 為平行四邊形，

可推得

$$\begin{aligned}&\text{平行四邊形}QRFO\text{的面積}\\&=\overline{SF}\times\overline{FN}=(\overline{AF}-\overline{AS})\times(\overline{FL}-\overline{NL})=(b-a)\times(b-a)=(b-a)^2.\end{aligned}$$

故

$$\text{四邊形}VUTS\text{的面積與四邊形}QRFO\text{的面積相等。}$$

9. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}CWHK\text{面積}&=\Delta CKT\text{面積}+\Delta KHS\text{面積}+\Delta HWV\text{面積}\\&\quad+\Delta WUC\text{面積}+\text{四邊形}VUTS\text{面積}\\&=\Delta GRA\text{面積}+\Delta FPL\text{面積}+\Delta WLN\text{面積}\\&\quad+\Delta LWG\text{面積}+\text{四邊形}QRFO\text{面積}\\&=(\Delta GQW\text{面積}+\text{四邊形}ARQW\text{面積})+(\Delta FON\text{面積}+\text{四邊形}PONL\text{面積})\\&\quad+\Delta WLN\text{面積}+\Delta LWG\text{面積}+\text{四邊形}QRFO\text{面積}\\&=(\Delta BXE\text{面積}+\text{四邊形}ARQW\text{面積})+(\Delta FON\text{面積}+\text{四邊形}BXDY\text{面積})\\&\quad+\Delta WLN\text{面積}+\Delta LWG\text{面積}+\text{四邊形}QRFO\text{面積}\\&=(\Delta BXE\text{面積}+\text{四邊形}BXDY\text{面積})+(\Delta FON\text{面積}+\text{四邊形}ARQW\text{面積}\\&\quad+\Delta WLN\text{面積}+\Delta LWG\text{面積}+\text{四邊形}QRFO\text{面積})\\&=\text{正方形}BYDE+\text{正方形}AGLF\text{面積，}\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 8 月 8 日想到的。
2. 心得：此證明的輔助圖比較複雜，要證明全等關係的圖形也比較多，對學生來說會覺得這個證明很複雜，事實上，這個證明是將正方形 $CWHK$ 切割成五個區塊，接著再證明這五個區塊的面積總和等於正方形 $BYDE$ 的面積加上正方形 $AGLF$ 的面積，最後就能順利推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●