勾股定理證明-G207

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$ABKH$.

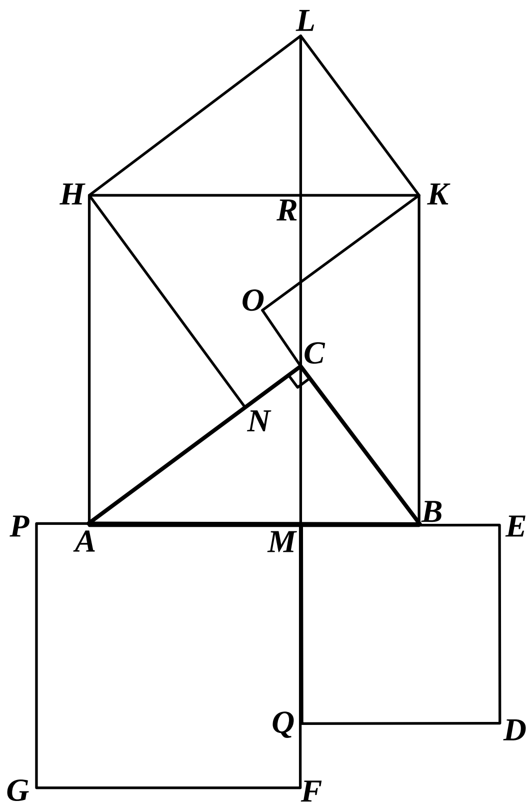
2. 過C點作垂直$\overline{AB}$的直線，交$\overline{AB}$於M點。

3. 在直線MB上取一點E使得$\overline{ME}=\overline{BC}=a$，以$\overline{ME}$為邊長作正方形$MEDQ$.

4. 在直線MA上取一點P使得$\overline{MP}=\overline{AC}=b$，以$\overline{MP}$為邊長作正方形$MPGF$.

5. 過K點作平行$\overline{BC}$的直線，交直線MC於L點，連$\overline{LH}$.

6. 過H點作垂直$\overline{CA}$的直線，交$\overline{CA}$於N點。
7. 過K點作垂直直線BC的直線，交直線BC於O點。



【求證過程】

正方形$ABKH$面積等於長方形$RKBM$的面積加上長方形$RHAM$的面積，證明長方形$RKBM$的面積等於正方形$MEDQ$的面積，同時長方形$RHAM$的面積也與正方形$MPGF$的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形 $KBCL$ 與四邊形 $HACL$ 皆為平行四邊形：

因為 $\overline{KB}//\overline{LC}$ 且 $\overline{KB}//\overline{LC}$ ，所以

$$\text{四邊形}KBCL\text{為平行四邊形。}$$

因為四邊形 $KBCL$ 為平行四邊形，所以 $\overline{KB}=\overline{LC}$ ，又因為 $\overline{HA}=\overline{KB}$ ，所以

$\overline{HA}=\overline{KB}=\overline{LC}$ 。因為 $\overline{HA}//\overline{LC}$ 且 $\overline{HA}=\overline{LC}$ ，所以

$$\text{四邊形}HACL\text{為平行四邊形。}$$

2. 證明三角形 BKO 全等於三角形 ABC ，進而推得 $\overline{KO}=\overline{BC}$ ：

因為 $\angle OBK=90^{\circ}-\angle CBA=\angle CAB$, $\angle BOK=90^{\circ}=\angle ACB$, $\overline{BK}=c=\overline{AB}$ ，所以

$$\Delta BKO\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等}).$$

因此

$$\overline{KO}=\overline{BC}.$$

3. 證明三角形 HAN 全等於三角形 ABC ，進而推得 $\overline{HN}=\overline{AC}$ ：

因為 $\angle NAH=90^{\circ}-\angle CAB=\angle CBA$, $\angle HNA=90^{\circ}=\angle ACB$, $\overline{HA}=c=\overline{AB}$ ，所以

$$\Delta HAN\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等}).$$

因此

$$\overline{HN}=\overline{AC}.$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積}&=\text{矩形}RKBM\text{面積}+\text{矩形}RHAM\text{面積}\\&=\text{平行四邊形}KBCL\text{面積}+\text{平行四邊形}HOCA\text{面積}\\&=\overline{BC}\times\overline{KO}+\overline{AC}\times\overline{HN}\\&=\overline{BC}\times\overline{BC}+\overline{AC}\times\overline{AC}\\&=\text{正方形}MEDQ\text{面積}+\text{正方形}MPGF\text{面積，}\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 1 月 31 日下午 3 點想到的。
2. 心得：此證明先將正方形的 $ABKH$ 面積轉換成兩個長方形的面積，再轉換成兩個平行四邊形的面積，最後再轉換成正方形 $MEDQ$ 的面積以及正方形 $MPGF$ 的面

積，最後就得到了勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●