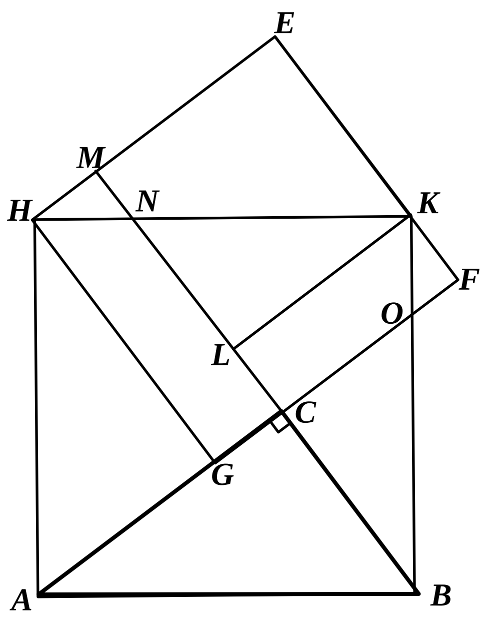
勾股定理證明-G206

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{AB}$ 為邊長向內作正方形 $ABKH$.
2. 過 H 點作垂直 $\overline{AC}$ 的直線，交 $\overline{AC}$ 於 G 點。
3. 過 H 點作垂直 $\overline{HG}$ 的直線，在此直線上取一點 E 點，使得 $\overline{HE}=\overline{AC}=b$.
4. 直線 EK 與直線 AC 相交於 F 點，直線 AC 交 $\overline{KB}$ 於 O 點。
5. 直線 BC 與 $\overline{HE}$ 相交於 M 點，直線 BC 與 $\overline{HK}$ 相交於 N 點。
6. 過 K 點作垂直直線 BC 的直線，交直線 AC 於 L 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊長向內作正方形 $ABKH$，證明正方形 $ABKH$ 面積所切割出的所有區塊面積總和等於正方形 $EKLM$ 的面積加上正方形 $EFGH$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 HAG 與三角形 HKE 皆和三角形 ABC 全等：

   在 ΔHAG 中，因為 $\angle HAG+\angle CAB=90^\circ=\angle CBA+\angle CAB$，所以 $\angle HAG=\angle CBA$，又

   $\angle HGA=90^\circ=\angle ACB$, $\overline{HA}=c=\overline{AB}$，可推得

$$\Delta HAG \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因為 $\angle EHK + \angle KHG = 90^\circ = \angle GHA + \angle KHG$，所以 $\angle EHK = \angle GHA$。因為

$\angle EHK = \angle GHA = \angle CAB$, $\overline{HE} = \overline{AC}$, $\overline{HK} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta HKE \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

故

$$\Delta HAG \cong \Delta ABC \cong \Delta HKE.$$

2. 證明四邊形 $EFGH$ 是面積為 b^2 的正方形：

因為 $\Delta HKE \cong \Delta ABC$，所以 $\angle HEK = \angle ACB = 90^\circ$，又 $\angle EHG = 90^\circ$, $\angle FGH = 90^\circ$，可推得

$$\text{四邊形}EFGH\text{的四個內角都是直角。}$$

因為 $\Delta HAG \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{HG} = \overline{AC} = b$，又 $\overline{HE} = \overline{AC} = b$，故

$$\text{四邊形}EFGH\text{是面積為}b^2\text{的正方形。}$$

3. 證明四邊形 $EKLM$ 是面積為 a^2 的正方形：

因為四邊形 $EFGH$ 是正方形，所以 $\angle CGH = \angle MHG = 90^\circ$。又因為 $\angle ACB = 90^\circ$，所以 $\angle MCG = 90^\circ$，可推得

$$\text{四邊形}MCGH\text{是四個內角都是直角的長方形。}$$

因為四邊形 $MCGH$ 是長方形，所以 $\angle EML = 90^\circ$，又 $\angle MEK = 90^\circ$, $\angle KLM = 90^\circ$，可推得

$$\text{四邊形}EKLM\text{的四個內角都是直角。}$$

ΔBKL 中，因為 $\angle LBK + \angle CBA = 90^\circ$，所以 $\angle LBK = 90^\circ - \angle CBA = \angle CAB$，又

$\angle BLK = 90^\circ = \angle ACB$, $\overline{BK} = c = \overline{AB}$，可推得

$$\Delta BKL \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因為 $\Delta BKL \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{KL} = \overline{BC} = a$，又 $\Delta HKE \cong \Delta ABC$，可推得 $\overline{EK} = \overline{CB} = a$，因此

$$\text{四邊形}EKLM\text{是面積為}a^2\text{的正方形。}$$

4. 證明三角形 HNM 與三角形 KOF 全等：

因為 $\angle MHN = \angle EHK = 90^\circ - \angle EKH = \angle FKO$, $\angle HMN = 90^\circ = \angle KFO$,

$\overline{MH} = \overline{EH} - \overline{EM} = b - a = \overline{FK}$ ，所以

$$\Delta HNM \cong \Delta KOF \text{ (ASA 全等)}.$$

5. 證明三角形 BFC 與三角形 KNL 全等：

因為 $\Delta HKE \cong \Delta ABC$ ，所以 $\angle EKH = \angle CBA$。因為

$\angle CBF = 90^\circ - \angle CBA = 90^\circ - \angle EKH = \angle LKN$, $\angle KLN = 90^\circ = \angle BCF$ ，四邊形 $EKLM$

是面積為 a^2 的正方形，所以 $\overline{BC} = a = \overline{KL}$ ，因此

$$\Delta BFC \cong \Delta KNL \text{ (ASA 全等)}.$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta ABC\text{面積} + \Delta HAG\text{面積} + \text{四邊形}KOGH\text{面積} + \Delta BFC\text{面積} \\
&= \Delta HKE\text{面積} + \Delta HKE\text{面積} + \text{四邊形}KOGH\text{面積} + \Delta KNL\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}EKNM\text{面積} + \Delta HNM\text{面積}) + \Delta HKE\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}KOGH\text{面積} + \Delta KNL\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}EKNM\text{面積} + \Delta KOF\text{面積}) + \Delta HKE\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}KOGH\text{面積} + \Delta KNL\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}EKNM\text{面積} + \Delta KNL\text{面積}) + (\Delta KOF\text{面積} \\
&\quad + \Delta HKE\text{面積} + \text{四邊形}KOGH\text{面積}) \\
&= \text{正方形}EKLM\text{面積} + \text{正方形}EFGH\text{面積}，
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Hopkins, G. I. (1891). *Plane Geometry* (p. 92). New York:D. C. Heath.

2. 心得：此證明是將正方形 $ABKH$ 切割成四邊形 $KOGH$ 以及三個三角形，再利用全等關係以及面積相等的關係，將這些面積轉換成正方形 $EKLM$ 的面積加上正方形 $EFGH$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：