# 勾股定理證明-G205

## 【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

2. 取$\overline{AB}$的中點$O$點，過$O$點作垂直$\overline{AC}$的直線，在此直線上取$F$點, $S$點使得

   $\overline{FO}=\overline{OS}=\dfrac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}$.

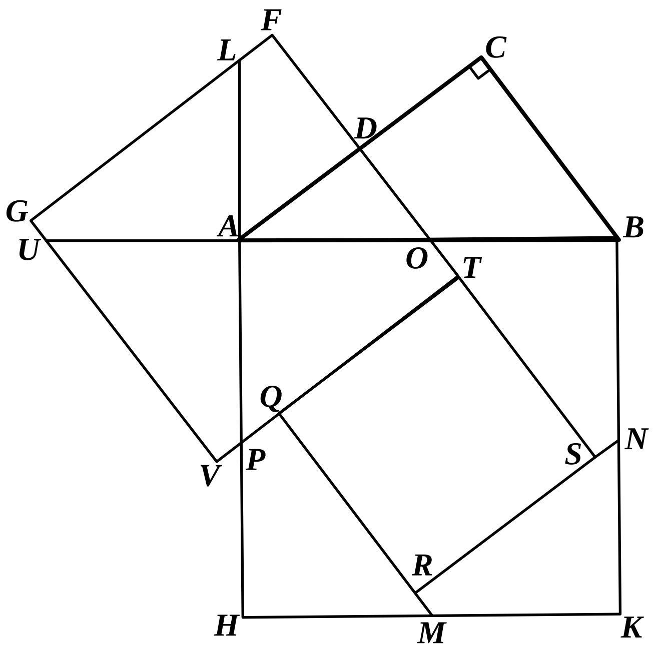
3. 在$\overline{OS}$上取一點$T$，使得$\overline{FT}=\overline{AC}=b$，以$A$點為中心，$\overline{FT}$為邊長作正方形$FTVG$.

4. $\overline{FT}$與$\overline{CA}$相交於$D$點，直線$AH$與$\overline{FG}$相交於$L$點。

5. 直線$AB$與$\overline{GV}$相交於$U$點，$\overline{TV}$與$\overline{AH}$相交於$P$點。

6. 以$\overline{ST}$為邊長作正方形$STQR$.

7. 直線$QR$與$\overline{HK}$相交於$M$點，直線$RS$與$\overline{BK}$相交於$N$點。




## 【求證過程】

以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$面積等於正方形$FTVG$的面積加上正方形$STQR$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形$UGLA$、四邊形$PVUA$、四邊形$OTPA$皆與四邊形$LFOA$全等：

設 $\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知 $x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$。因為 $\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle ODA = 90^{\circ}$，所以 $\angle DOA = y^{\circ}$，可推得 $\angle FLA = 180^{\circ} - y^{\circ}$。因為 $\angle LFO = 90^{\circ} = \angle UGL$,

$\angle LAO = 90^{\circ} = \angle UAL$，所以

$$\text{四邊形}LFOA\text{與四邊形}UGLA\text{的四個內角都對應相等，}$$

又因為 $A$ 點為正方形 $FTVG$ 的中心且 $\overline{OU} \perp \overline{LP}$，所以 $\overline{OA} = \overline{LA}$, $\overline{LA} = \overline{UA}$，因此

$$\text{四邊形}LFOA\text{與四邊形}UGLA\text{全等。}$$

同理可證

$$\text{四邊形}UGLA\text{與四邊形}PVUA\text{全等，}$$

且

$$\text{四邊形}PVUA\text{與四邊形}OTPA\text{全等，}$$

故

$$\text{四邊形}UGLA\text{、四邊形}PVUA\text{、四邊形}OTPA\text{ 皆與四邊形}LFOA\text{ 全等。}$$

2. 證明四邊形 $NSOB$ 與四邊形 $LFOA$ 全等：

因為 $\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle ODA = 90^{\circ}$，所以 $\angle DOA = y^{\circ}$。因為 $\angle SOB = \angle FOA = y^{\circ}$,

$\angle OBN = 90^{\circ} = \angle OAL$, $\angle NSO = 90^{\circ} = \angle LFO$，所以

$$\text{四邊形}NSOB\text{與四邊形}LFOA\text{的四個內角都對應相等，}$$

又因為 $\overline{OB} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA}$, $\overline{SO} = \dfrac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2} = \dfrac{a+b}{2} = \overline{FO}$，所以

$$\text{四邊形}NSOB\text{與四邊形}LFOA\text{全等。}$$

3. 證明四邊形 $OTPA$ 與四邊形 $NSOB$ 全等：

由第 1 點知四邊形 $OTPA$ 與四邊形 $LFOA$ 全等，由第 2 點知四邊形 $NSOB$ 與四邊形 $LFOA$ 全等，故

$$\text{四邊形}OTPA\text{與四邊形}NSOB\text{全等。}$$

4. 證明四邊形 $NSOB$ 與四邊形 $MRNK$ 全等以及四邊形 $MRNK$ 與四邊形 $PQMC$ 全等：

因為 $\angle SOB = y^{\circ} = 180^{\circ} - \angle BNS = \angle RNK$, $\angle NSO = 90^{\circ} = \angle MRN$,

$\angle OBN = 90^{\circ} = \angle NKM$，所以

$$\text{四邊形}NSOB\text{與四邊形}MRNK\text{的四個內角都對應相等，}$$

又因為四邊形 $OTPA$ 與四邊形 $NSOB$ 全等，所以 $\overline{BN} = \overline{OA} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \dfrac{1}{2}c$ 且 $\overline{OT} = \overline{SN}$。

因為 $\overline{BN}=\frac{1}{2}c=\overline{NK}$, $\overline{OS}=\overline{OT}+\overline{TS}=\overline{SN}+\overline{RS}=\overline{NR}$ ，所以

$$\text{四邊形}NSOB\text{與四邊形}MRNK\text{全等。}$$

同理可證

$$\text{四邊形}MRNK\text{與四邊形}PQMC\text{全等。}$$

5. 由第 1、2、3、4 點知四邊形 $UGLA$、四邊形 $PVUA$、四邊形 $OTPA$、四邊形 $NSOB$、四邊形 $MRNK$、四邊形 $PQMC$ 皆與四邊形 $LFOA$ 全等。

6. 證明正方形 $STQR$ 的面積為 $a^2$：

因為 $\overline{ST}=\overline{FO}+\overline{OS}-\overline{FT}=\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}+\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}-\overline{AC}=\overline{BC}=a$ ，所以

$$\text{正方形}STQR\text{的面積為}a^2\text{。}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{四邊形}OTPA\text{面積}+\text{四邊形}NSOB\text{面積}+\text{四邊形}MRNK\text{面積}\\ &\quad+\text{四邊形}PQMC\text{面積}+\text{正方形}STQR\text{面積}\\ &=\text{四邊形}LFOA\text{面積}+\text{四邊形}LFOA\text{面積}+\text{四邊形}LFOA\text{面積}\\ &\quad+\text{四邊形}LFOA\text{面積}+\text{正方形}STQR\text{面積}\\ &=\text{四邊形}LFOA\text{面積}+\text{四邊形}UGLA\text{面積}+\text{四邊形}PVUA\text{面積}\\ &\quad+\text{四邊形}OTPA\text{面積}+\text{正方形}STQR\text{面積}\\ &=\text{正方形}FTVG\text{面積}+\text{正方形}STQR\text{面積}\\ &=b^2+a^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

**【註與心得】**

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

   Perigal, Henry(1873). On geometric dissections and transformations. *Messenger of Mathematics*, *2*, 103.

2. 心得：此證明的切割方式比較特別，將正方形 $ABKH$ 切割成四個四邊形以及一個小正方形，接下來再把四邊形的面積再轉換，由於必須證明一些四邊形的全等，所以整個證明是比較複雜的。
3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | | ● | ● |

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：