勾股定理證明-G204

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABKH$.

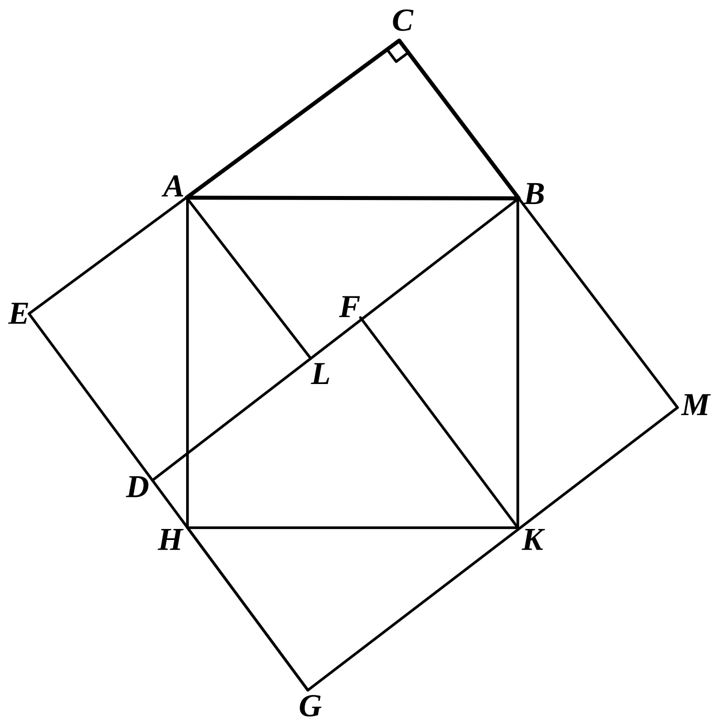
2. 延長 $\overrightarrow{CA}$ 至 E 點，延長 $\overrightarrow{CB}$ 至 M 點，使得 $\overline{AE}=\overline{CB}=a$, $\overline{BM}=\overline{CA}=b$.

3. $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{MK}$ 相交於 G 點。

4. 過 B 點作平行 $\overline{CA}$ 的直線，交 $\overline{EH}$ 於 D 點。

5. 過 A 點作垂直 $\overline{BD}$ 的直線，交 $\overline{BD}$ 於 L 點。

6. 過 K 點作垂直 $\overline{BD}$ 的直線，交 $\overline{BD}$ 於 F 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABKH$ ，證明正方形 $ABKH$ 所切割出的所有區塊面積總和等於正方形 $AEDL$ 的面積加上正方形 $GKFD$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 HAE 與三角形 BKM 皆全等於三角形 ABC ：

因為 $\angle HAE+\angle CAB=90^{\circ}$，所以 $\angle HAE=90^{\circ}-\angle CAB=\angle CBA$，又 $\overline{AE}=c=\overline{BC}$,

$\overline{AH}=c=\overline{AB}$，可推得

$$\Delta HAE\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}).$$

因為 $\angle MBK+\angle CBA=90^{\circ}$，所以 $\angle MBK=90^{\circ}-\angle CBA=\angle CAB$，又 $\overline{BM}=b=\overline{AC}$,

$\overline{BK}=c=\overline{AB}$，可推得

$$\Delta BKM\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}).$$

2. 證明四邊形 $CEGM$ 是邊長為 $a+b$ 的正方形：

因為 $\Delta HAE\cong\Delta ABC$, $\Delta BKM\cong\Delta ABC$，所以 $\angle HEA=\angle ACB=90^{\circ}$,

$\angle BMK=\angle ACB=90^{\circ}$，又 $\angle ACB=90^{\circ}$，可推得

$$\text{四邊形}CEGM\text{的四個內角都是直角。}$$

又因為 $\overline{HE}=\overline{CA}+\overline{AE}=b+a$, $\overline{HM}=\overline{CB}+\overline{BM}=a+b$，所以

$$\text{四邊形}CEGM\text{是邊長為}a+b\text{的正方形。}$$

3. 證明三角形 KHG 全等於三角形 ABC：

因為 $\Delta HAE\cong\Delta ABC$, $\Delta BKM\cong\Delta ABC$，所以 $\angle EHA=\angle CAB$, $\angle MKB=\angle CBA$，可推得 $\angle GHK=90^{\circ}-\angle EHA=90^{\circ}-\angle CAB=\angle CBA$,

$\angle GKH=90^{\circ}-\angle MKB=90^{\circ}-\angle CBA=\angle CAB$，又 $\overline{KH}=c=\overline{AB}$，因此

$$\Delta KHG\cong\Delta ABC\ (\text{ASA 全等}).$$

4. 證明三角形 BAL 全等於三角形 ABC：

因為 $\angle BLA=90^{\circ}$ 且 $\overline{BD}//\overline{CA}$，所以 $\angle BAL+\angle CAB=90^{\circ}$，可推得

$\angle BAL=90^{\circ}-\angle CAB=\angle CBA$，又因為 $\angle BLA=90^{\circ}=\angle ACB$, $\overline{BA}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta BAL\cong\Delta ABC\ (\text{ASA 全等}).$$

5. 證明三角形 KBF 全等於三角形 ABC：

因為$\Delta BAL \cong \Delta ABC$，所以$\angle LBA = \angle CAB$，可推得

$\angle KBF = 90^{\circ} - \angle LBA = 90^{\circ} - \angle CAB = \angle CBA$，又因為$\angle KFB = 90^{\circ} = \angle ACB$,

$\overline{BK} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta KBF \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

6. 證明四邊形$AEDL$是正方形且面積為a^2：

因為$\Delta HAE \cong \Delta ABC$，所以$\angle HEA = \angle ACB = 90^{\circ}$，又因為$\overline{BD} // \overline{CE}$，所以$\angle EDL = 90^{\circ}$，

又$\angle ALD = 90^{\circ}$，可推得

$$\text{四邊形}AEDL\text{的四個內角都是直角。}$$

因為$\Delta BAL \cong \Delta ABC$，所以$\overline{AL} = \overline{BC} = a$，又因為$\overline{AE} = \overline{CB} = a$，所以

$$\text{四邊形}AEDL\text{是面積為}a^2\text{的正方形。}$$

7. 證明四邊形$GKFD$是正方形且面積為b^2：

因為四邊形$AEDL$是正方形，所以$\angle EDL = 90^{\circ}$，又因為$\Delta KHG \cong \Delta ABC$，所以

$\angle KGH = \angle ACB = 90^{\circ}$。因為$\angle FDG = \angle EDL = 90^{\circ}$, $\angle DGK = \angle KGH = 90^{\circ}$,

$\angle KFD = 90^{\circ}$，所以

$$\text{四邊形}GKFD\text{的四個內角都是直角。}$$

因為$\Delta KHG \cong \Delta ABC$, $\Delta KBF \cong \Delta ABC$，所以$\overline{KG} = \overline{AC} = b$, $\overline{KF} = \overline{AC} = b$，故

$$\text{四邊形}GKFD\text{是面積為}b^2\text{的正方形。}$$

8. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{正方形}CEGM\text{面積} - \Delta ABC\text{面積} - \Delta HAE\text{面積} \\
&\quad - \Delta KHG\text{面積} - \Delta BKM\text{面積} \\
&= \text{正方形}CEGM\text{面積} - 4\Delta ABC\text{面積} \\
&= \text{正方形}CEGM\text{面積} - 2\Delta ABC\text{面積} - 2\Delta ABC\text{面積} \\
&= \text{正方形}CEGM\text{面積} - (\Delta ABC\text{面積} + \Delta BAL\text{面積}) \\
&\quad - (\Delta KBF\text{面積} + \Delta BKM\text{面積}) \\
&= \text{正方形}AEDL\text{面積} + \text{正方形}GKFD\text{面積}，
\end{aligned}
$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Edwards, George C. (1895). *Elements of Geometry*(p.158). New York: Macmillan and co.

2. 心得：此證明的輔助圖為一個大正方形，很有美感。此證明的方式為利用正方形 $ABKH$ 面積等於四邊形 $CEGM$ 面積減去四個三角形的面積，而四邊形 $CEGM$ 面積減去四個三角形的面積等於正方形 $AEDL$ 的面積加上正方形 $BLGF$ 的面積，就能推導出正方形 $ABKH$ 面積等於正方形 $AEDL$ 的面積加上正方形 $GKFD$ 的面積，進而得到勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●