勾股定理證明-G203

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

2. $\overline{AB}$上取一點R，使得$\overline{AR}=\overline{AC}=b$，以$\overline{AR}$為邊長作正方形$ARFG$.

3. $\overline{AR}$上取一點D，使得$\overline{AD}=\overline{BC}=a$，以$\overline{AD}$為邊長向外作正方形$ADET$.

4. 直線DE交$\overline{GF}$於S點，連$\overline{SA}$.

5. $\overline{ED}$與$\overline{CA}$相交於U點。

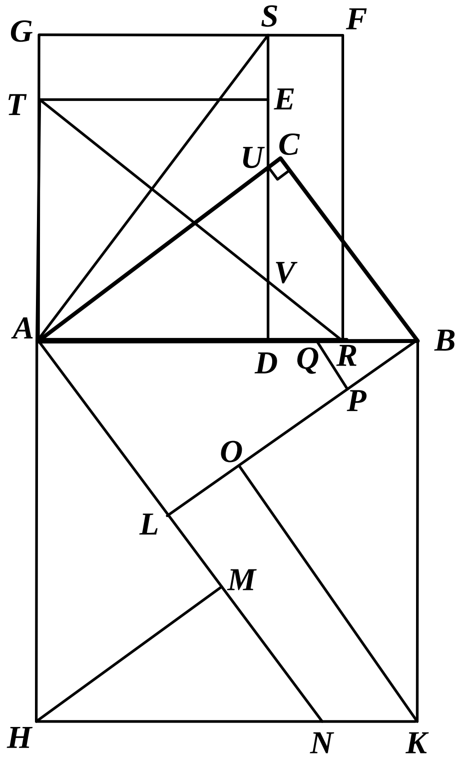
6. 連$\overline{TR}$，交$\overline{ED}$於V點。

7. 過A點作平行$\overline{CB}$的直線，交$\overline{HK}$於N點。

8. 過H點作垂直$\overline{AN}$的直線，交$\overline{AN}$於M點；過B點作垂直$\overline{AN}$的直線，交$\overline{AN}$於L點。

9. 過K點作垂直$\overline{BL}$的直線，交$\overline{BL}$於O點。

10. $\overline{AB}$上取一點Q，使得$\overline{BQ}=\overline{RV}$，過$Q$點作垂直$\overline{BL}$的直線，交$\overline{BL}$於$P$點。



【求證過程】

以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$面積等於正方形$ADET$的面積加上正方形$ARFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形AHM與三角形ASG全等：

設$\angle CAB = x^\circ,\ \angle CBA = y^\circ$，且已知$x^\circ + y^\circ = 90^\circ$。因為$\overline{AN} // \overline{CB}$，所以

$\angle ANH = \angle CBA = y^\circ$。因為$\angle MAH = 90^\circ - \angle ANH = 90^\circ - y^\circ = x^\circ = \angle CAB,$

$\angle AMH = 90^\circ = \angle ACB,\ \overline{AH} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta AHM \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

因為$\overline{SG} = a = \overline{BC},\ \angle AGS = 90^\circ = \angle ACB,\ \overline{AG} = b = \overline{AC}$，所以

$$\Delta ASG \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

故

$$\Delta AHM \cong \Delta ASG.$$

2. 證明三角形BAL與三角形ABC全等：

因為$\angle BAL = 90^\circ - \angle MAH = 90^\circ - x^\circ = \angle CBA,\ \angle BLA = 90^\circ = \angle ACB,\ \overline{BA} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta BAL \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

3. 證明三角形 KBO 與三角形 SAD 全等：

因為 $\Delta BAL \cong \Delta ABC$ ，所以 $\angle LBA = \angle CAB = x^{\circ}$ 。因為

$\angle KBO = 90^{\circ} - \angle LBA = 90^{\circ} - x^{\circ} = \angle CBA$, $\angle KOB = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{KB} = c = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta KBO \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因為 $\overline{AD} = a = \overline{BC}$, $\angle SDA = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{SD} = \overline{FR} = b = \overline{AC}$ ，所以

$$\Delta SAD \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

故

$$\Delta KBO \cong \Delta SAD.$$

4. 證明三角形 BQP 與三角形 RVD 全等：

因為 $\overline{TA} = a = \overline{BC}$, $\angle RAT = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{RA} = b = \overline{AC}$ ，所以

$$\Delta RTA \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

因為 $\Delta BAL \cong \Delta ABC$, $\Delta RTA \cong \Delta ABC$ ，所以 $\angle PBQ = \angle LBA = \angle CAB$,

$\angle DRV = \angle ART = \angle CAB$ ，可推得 $\angle PBQ = \angle DRV$ ，又因為 $\overline{BQ} = \overline{RV}$,

$\angle BPQ = 90^{\circ} = \angle RDV$ ，所以

$$\Delta BQP \cong \Delta RVD \text{ (AAS 全等).}$$

5. 證明四邊形 $OLNK$ 與四邊形 $FSVR$ 全等：

因為 $\Delta KBO \cong \Delta ABC$ ，所以 $\angle OKB = \angle CAB$ ，可推得

$\angle OKN = 90^{\circ} - \angle OKB = 90^{\circ} - \angle CAB$ 。因為 $\angle DRV = \angle CAB$ 且 $\angle FRV = 90^{\circ} - \angle DRV$ ，

所以 $\angle FRV = 90^{\circ} - \angle CAB$ ，可推得

$$\angle OKN = \angle FRV.$$

又因為 $\angle KOL = 90^{\circ} = \angle RFS$, $\angle OLN = 90^{\circ} = \angle FSV$ ，所以

四邊形 $OLNK$ 與四邊形 $FSVR$ 的四個內角都對應相等。

因為 $\Delta KBO \cong \Delta ABC$ ，所以

$$\overline{OK} = \overline{CA} = b = \overline{FR}.$$

因為 $\Delta KBO \cong \Delta ABC$, $\Delta BAL \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{BO} = \overline{BC} = a$, $\overline{BL} = \overline{AC} = b$ ，可推得

$$\overline{OL} = \overline{BL} - \overline{BO} = b - a = \overline{FG} - \overline{SG} = \overline{FS}.$$

故

$$四邊形OLNK \cong 四邊形FSVR.$$

6. 證明三角形 HNM 與三角形 AUD 全等：

因為 $\overline{AN} // \overline{CB}$，所以 $\angle ANH = \angle CBA = y^\circ$，可推得 $\angle MNH = \angle ANH = y^\circ$，因此

$$\angle MHN = 90^\circ - \angle MNH = 90^\circ - y^\circ = x^\circ = \angle DAU.$$

因為 $\Delta AHM \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{HM} = \overline{BC} = a$，可推得

$$\overline{HM} = a = \overline{AD}.$$

又因為 $\angle HMN = 90^\circ = \angle ADU$，所以

$$\Delta HNM \cong \Delta AUD (\text{ASA 全等}).$$

7. 證明四邊形 $QPLA$ 與四邊形 $UETA$ 全等：

因為 $\Delta AHM \cong \Delta ABC$，所以 $\angle MAH = \angle CAB = x^\circ$，可推得

$$\angle QAL = 90^\circ - \angle MAH = 90^\circ - x^\circ = \angle UAT.$$

又因為 $\angle QPL = 90^\circ = \angle UET$, $\angle PLA = 90^\circ = \angle ETA$，所以

四邊形$QPLA$與四邊形$UETA$的四個內角都對應相等。

因為 $\Delta BAL \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{BL} = \overline{AC} = b$，又因為 $\Delta BQP \cong \Delta RVD$，所以

$\overline{BP} = \overline{RD} = b - a$，可推得

$$\overline{PL} = \overline{BL} - \overline{BP} = b - (b - a) = a = \overline{ET}.$$

又因為 $\Delta BAL \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{LA} = \overline{CB} = a$，可推得

$$\overline{LA} = a = \overline{TA}.$$

故

$$四邊形QPLA \cong 四邊形UETA.$$

8. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
正方形ABKH面積 &= \Delta AHM面積 + \Delta KBO面積 + \Delta BQP面積 + 四邊形OLNK面積 \\
&\quad + \Delta HNM面積 + 四邊形QPLA面積 \\
&= \Delta ASG面積 + \Delta SAD面積 + \Delta RVD面積 + 四邊形FSVR面積 \\
&\quad + \Delta AUD面積 + 四邊形UETA面積 \\
&= 正方形ARFG面積 + 正方形ADET面積，
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1933 年 11 月 16 日想到的。
2. 心得：此證明的輔助圖比較複雜，但是仍然是用切割的方式證明，只要證明正方形 $ABKH$ 切割出來的區塊面積，恰好等於正方形 $ADET$ 的面積加上正方形 $ARFG$ 的面積，就能推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●