勾股定理證明-G202

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

2. $\overline{BC}$為邊長向內作正方形$BCQO$.

3. $\overline{AH}$上取一點S，使得$\overline{AS}=\overline{BC}=a$，以$\overline{AS}$為邊長向外作正方形$ASED$.

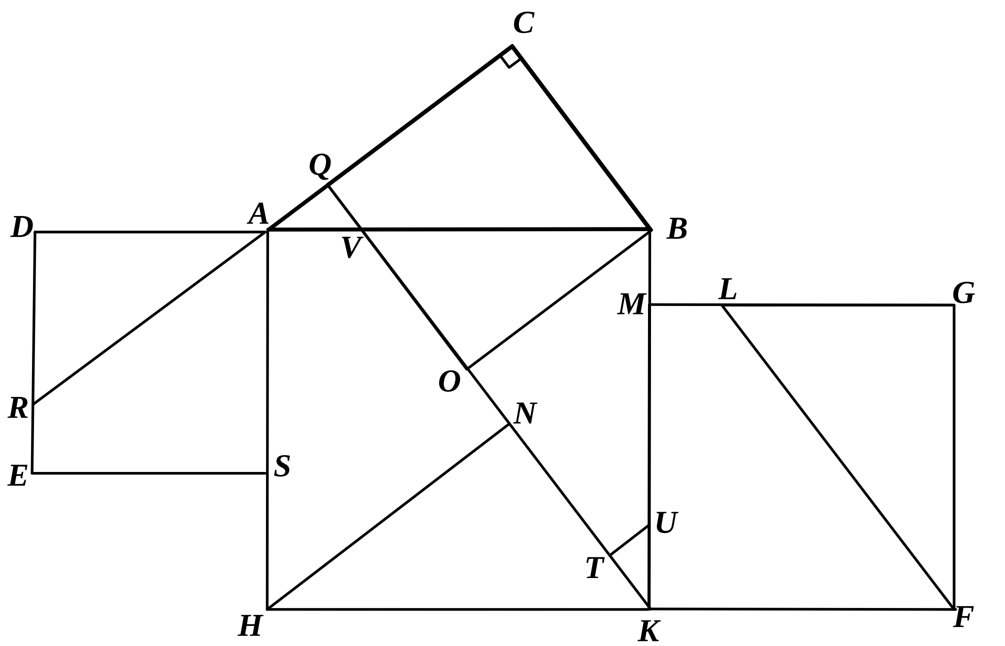
4. $\overline{BK}$上取一點M，使得$\overline{KM}=\overline{AC}=b$，以$\overline{KM}$為邊長向外作正方形$KMGF$.

5. 連$\overline{OK}$，過H點作垂直$\overline{OK}$的直線，交$\overline{OK}$於N點。

6. 直線CA交$\overline{DE}$於R點。

7. $\overline{MG}$上取一點L，使得$\overline{LG}=\overline{BC}=a$.

8. $\overline{MK}$上取一點U，使得$\overline{KU}=\overline{AV}$，過$U$點作垂直$\overline{OK}$的直線，交$\overline{OK}$於$T$點。



【求證過程】

以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$面積等於正方形$ASED$的面積加上正方形$KMGF$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明$Q-O-K$共線：

設$\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知$x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$。因為

$\angle KBO + \angle VBO = 90^{\circ} = \angle CBA + \angle VBO$，所以$\angle KBO = \angle CBA = y^{\circ}$，又因為

$\overline{BO} = a = \overline{BC}$, $\overline{KB} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta KBO \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

即$\angle KOB = \angle ACB = 90^{\circ}$，故

$$Q-O-K\text{共線。}$$

2. 證明三角形HTN與三角形FLG全等：

   因為$\Delta KBO \cong \Delta ABC$，所以$\angle OKB = \angle CAB = x^{\circ}$。因為

   $\angle HKN = 90^{\circ} - \angle OKB = 90^{\circ} - x^{\circ} = y^{\circ} = \angle CBA$, $\angle HNK = 90^{\circ} = \angle ACB$,

   $\overline{HK} = c = \overline{AB}$，所以

   $$\Delta HKN \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

   因為$\overline{LG} = \overline{BC} = a$, $\angle FGL = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{FG} = b = \overline{AC}$，所以

   $$\Delta FLG \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

   故

   $$\Delta HKN \cong \Delta FLG.$$

3. 證明三角形BVO與三角形ARD全等：

   因為$\angle OBV = 90^{\circ} - \angle CBA = \angle CAB = \angle DAR$, $\overline{BO} = a = \overline{AD}$, $\angle BOV = 90^{\circ} = \angle ADR$，所以

   $$\Delta BVO \cong \Delta ARD \text{ (ASA 全等)}.$$

4. 證明四邊形$BUTO$與四邊形$ARES$全等：

   因為$\angle OBU = y^{\circ} = 90^{\circ} - x^{\circ} = \angle SAR$, $\angle BOT = 90^{\circ} = \angle ASE$, $\angle OTU = 90^{\circ} = \angle SER$，所以

   $$\text{四邊形}BUTO\text{與四邊形}ARES\text{的四個內角都對應相等。}$$

   又$\overline{BU} = \overline{BK} - \overline{UK} = \overline{AB} - \overline{AV} = \overline{VB} = \overline{AR}$, $\overline{BO} = a = \overline{AS}$，因此

   $$\text{四邊形}BUTO \cong \text{四邊形}ARES.$$

5. 證明三角形KUT與三角形AVQ全等：

   因為$\Delta KBO \cong \Delta ABC$，所以$\angle BKO = \angle CAB$。因為$\angle TKU = \angle BKO = \angle CAB = \angle QAV$,

$\overline{KU}=\overline{AV}$, $\angle KTU = 90^\circ = \angle AQV$ ，所以

$$\Delta KUT \cong \Delta AVQ \text{(AAS 全等)}.$$

6. 證明四邊形 $AQNH$ 與四邊形 $LMKF$ 全等：

   因為 $\Delta HKN \cong \Delta FLG$ ，所以 $\angle NHK = \angle GFL$ 。因為

   $\angle AHN = 90^\circ - \angle NHK = 90^\circ - \angle GFL = \angle LFK$, $\angle AQN = 90^\circ = \angle LMK$,

   $\angle QNH = 90^\circ = \angle MKF$ ，所以

   $$\text{四邊形}AQNH\text{與四邊形}LMKF\text{的四個內角都對應相等。}$$

   因為 $\Delta HKN \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{NH}=\overline{AC}=b$ ，可推得

   $$\overline{NH}=b=\overline{KF}.$$

   又因為 $\Delta FLG \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{FL}=\overline{AB}=c$ ，可推得

   $$\overline{HA}=c=\overline{FL}.$$

   故

   $$\text{四邊形}AQNH \cong \text{四邊形}LMKF.$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta BVO\text{面積} + \text{四邊形}BUTO\text{面積} + \Delta KUT\text{面積} \\
&\quad + \Delta HKN\text{面積} + \text{四邊形}AVNH\text{面積} \\
&= \Delta ARD\text{面積} + \text{四邊形}ARES\text{面積} + \Delta AVQ\text{面積} \\
&\quad + \Delta FLG\text{面積} + \text{四邊形}AVNH\text{面積} \\
&= (\Delta ARD\text{面積} + \text{四邊形}ARES\text{面積}) + \Delta FLG\text{面積} \\
&\quad + (\Delta AVQ\text{面積} + \text{四邊形}AVNH\text{面積}) \\
&= \text{正方形}ASED\text{面積} + \Delta FLG\text{面積} + \text{四邊形}LMKF\text{面積} \\
&= \text{正方形}HSFG\text{面積} + \text{正方形}KMGF\text{面積}，
\end{aligned}$$

   即

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 27 日晚上 10 點 40 分想到的。
2. 心得：此證明將正方形 $ABKH$ 切割成五個區塊，只要證明這五個區塊的面積等於正方形 $ASED$ 的面積加上正方形 $KMGF$ 的面積，就能順利推導出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：