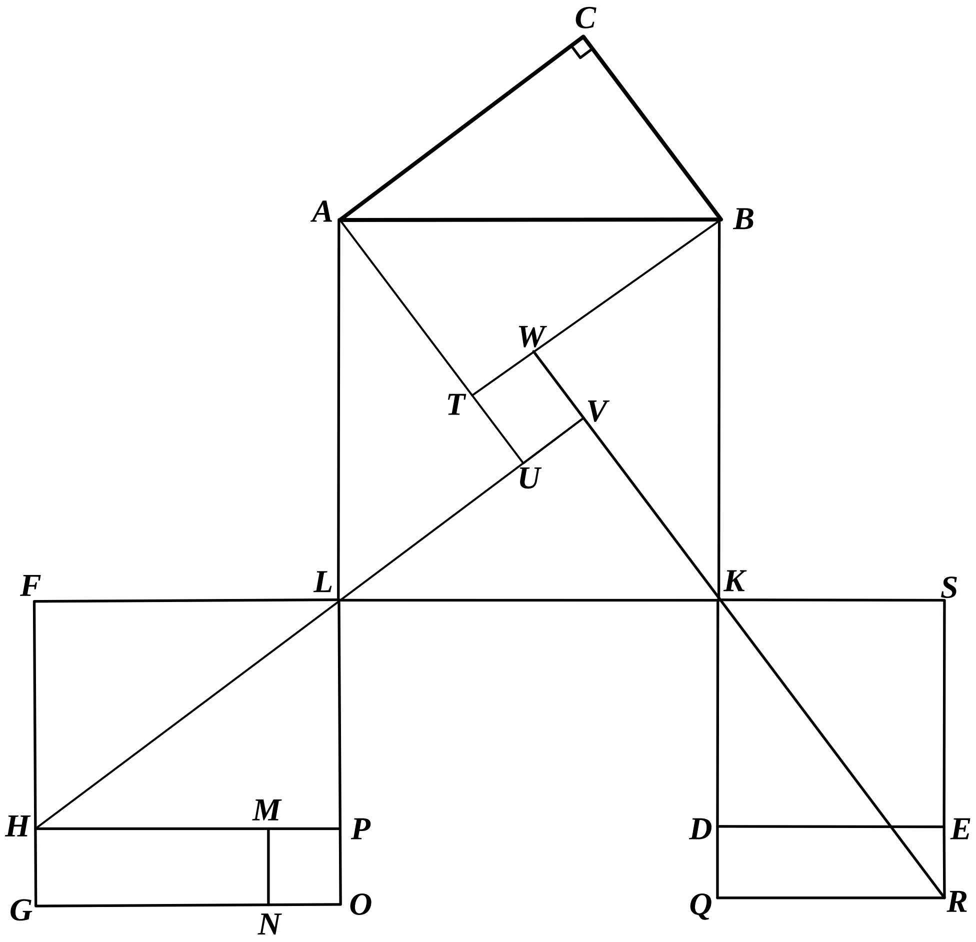
勾股定理證明-G201

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKL$.
2. 延長$\overline{AL}$至O點，使得$\overline{LO}=\overline{AC}=b$，以$\overline{LO}$為邊長作正方形$LOGF$.
3. 延長$\overline{BK}$至D點，使得$\overline{KD}=\overline{BC}=a$，以$\overline{KD}$為邊長作正方形$KDES$.
4. 分別以A點, L點為圓心，$\overline{AC}$, $\overline{BC}$為半徑畫圓，兩圓相交於U點，連$\overline{AU}$, $\overline{LU}$.
5. 直線UL與$\overline{FG}$交於H點，過H點作平行$\overline{AB}$的直線，交$\overline{LO}$於P點。
6. 過B點作垂直$\overline{AU}$的直線，交$\overline{AU}$於T點。
7. 過K點作垂直$\overline{BT}$的直線，交$\overline{BT}$於W點。
8. 直線WK與直線SE交於R點，過R點作垂直直線KD的直線，交直線KD於Q點。
9. 在$\overline{CP}$上取一點M，使得$\overline{CM}=\overline{DE}$，過$M$點作垂直$\overline{GO}$的直線，交$\overline{GO}$於$N$點。
10. 過U點作垂直$\overline{WK}$的直線，交$\overline{WK}$於V點。



【求證過程】

以 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABKL$，證明正方形 $ABKL$ 面積等於正方形 $KDES$ 的面積加上正方形 $LOGF$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 ALU 全等於三角形 LHF：

因為 $\overline{AU}=\overline{AC}$, $\overline{LU}=\overline{BC}$, $\overline{AL}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta ALU \cong \Delta ABC \text{ (SSS 全等)}.$$

設 $\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知 $x^{\circ}+y^{\circ}=90^{\circ}$。因為 $\Delta ALU \cong \Delta ABC$，所以

$\angle ALU = \angle ABC = y^{\circ}$。因為 $\angle FLC = 90^{\circ} - \angle ALU = 90^{\circ} - y^{\circ} = x^{\circ} = \angle CAB$,

$\angle LFC = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{LF} = b = \overline{AC}$，所以

$$\Delta LCF \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

因此

$$\Delta ALU \cong \Delta LCF\ .$$

2. 證明 $V-U-L$ 共線：

因為 $\Delta ALU \cong \Delta ABC$ ，所以

$$\angle AUL = \angle ACB = 90^\circ.$$

四邊形 $TUVW$ 中，因為 $\angle BTU = 90^\circ = \angle VWT = \angle UVW$ ，所以

$$\angle TUV = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

故

$$V - U - L \text{共線。}$$

3. 證明三角形 LKV 全等於三角形 CLP ：

因為 $\angle VLK = 90^\circ - \angle ALU = 90^\circ - \angle ABC = \angle CAB$, $\overline{LK} = c = \overline{AB}$,

$\angle LVK = 90^\circ = \angle ACB$ ，所以

$$\Delta LKV \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因為 $\Delta LCF \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{LC} = \overline{AB} = c$ ，又因為 $\angle PLC = \angle ALU = y^\circ = \angle CBA$,

$\angle CPL = 90^\circ = \angle ACB$ ，所以

$$\Delta CLP \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等),}$$

因此

$$\Delta LKV \cong \Delta CLP.$$

4. 證明三角形 KBW 全等於三角形 KRQ ：

因為 $\Delta LKV \cong \Delta ABC$ ，所以 $\angle VKL = \angle CBA = y^\circ$ 。因為

$\angle WKB = 90^\circ - \angle VKL = 90^\circ - y^\circ = x^\circ = \angle CAB$, $\overline{KB} = c = \overline{AB}$, $\angle KWB = 90^\circ = \angle ACB$ ，

所以

$$\Delta KBW \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因為 $\angle QKR = \angle WKB$ (對頂角)，所以 $\angle QKR = \angle WKB = x^\circ = \angle ACB$ ，又因為

$\angle KQR = 90^\circ = \angle ACB$, $\overline{RQ} = a = \overline{BC}$ ，所以

$$\Delta KRQ \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因此

$$\Delta KBW \cong \Delta KRQ.$$

5. 證明三角形 BAT 全等於三角形 RKS ：

因為 $\Delta KBW \cong \Delta ABC$ ，所以 $\angle KBW = \angle ABC = y^\circ$ 。因為

$\angle TBA = 90^\circ - \angle KBW = 90^\circ - y^\circ = x^\circ = \angle CAB$, $\angle BTA = 90^\circ = \angle ACB$, $\overline{BA} = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta BAT \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

因為 $\angle SKR = 90^\circ - \angle QKR = 90^\circ - x^\circ = y^\circ = \angle CBA$, $\overline{KS} = a = \overline{BC}$,

$\angle RSK = 90^\circ = \angle ACB$ ，所以

$$\Delta RKS \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

因此

$$\Delta BAT \cong \Delta RKS.$$

6. 證明長方形 $DERQ$ 的面積等於長方形 $CMNG$ 的面積：

長方形 $DERQ$ 中，因為 $\Delta KRQ \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{KQ} = \overline{AC} = b$ ，可推得

$$\overline{DQ} = \overline{KQ} - \overline{KD} = b - a.$$

長方形 $CMNG$ 中，因為 $\Delta LCF \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{FC} = \overline{FG} = \overline{CB} = a$ ，可推得

$$\overline{CG} = \overline{FG} - \overline{FC} = b - a.$$

故

$$\begin{aligned} \text{長方形}DERQ\text{面積} &= \overline{DE} \times \overline{DQ} \\ &= \overline{CM} \times (b-a) \\ &= \overline{CM} \times \overline{CG} \\ &= \text{長方形}CMNG\text{面積。} \end{aligned}$$

7. 證明四邊形 $TUVW$ 與四邊形 $MNOP$ 都是面積為 $(b-a)^2$ 的正方形：

四邊形 $TUVW$ 中，因為 $\Delta ALU \cong \Delta ABC$, $\Delta BAT \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{TU} = \overline{AU} - \overline{AT} = b - a$.

又因為 $\Delta BAT \cong \Delta ABC$, $\Delta KBW \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{TW} = \overline{TB} - \overline{WB} = b - a$ ，又

四邊形 $TUVW$ 四個內角都是直角，因此

$$\text{四邊形}TUVW\text{是面積為}(b-a)^2\text{的正方形。}$$

四邊形 $MNOP$ 中，因為 $\Delta CLP \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{MP} = \overline{CP} - \overline{CM} = \overline{AC} - \overline{DE} = b - a$. 又因

為 $\overline{MN} = \overline{CG} = b - a$ ，四邊形 $MNOP$ 四個內角都是直角，所以

$$四邊形MNOP是面積為(b-a)^2的正方形。$$

故

$$四邊形TUVW面積=四邊形MNOP面積。$$

8. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
正方形ABKL面積 &= \Delta ALU面積+\Delta LKV面積+\Delta KBW面積+\Delta BAT面積+四邊形TUVW面積\\
&= \Delta LCF面積+\Delta CLP面積+\Delta KRQ面積+\Delta RKS面積+四邊形MNOP面積\\
&= \Delta LCF面積+\Delta CLP面積+正方形KDES面積+長方形DERQ面積\\
&\quad +四邊形MNOP面積\\
&= \Delta LCF面積+\Delta CLP面積+正方形KDES面積+長方形CMNG面積\\
&\quad +四邊形MNOP面積\\
&= 正方形KDES+正方形LOGF面積，
\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 27 日想到的。
2. 心得：此證明的切割法與 G200 相同，都是將正方形切割成四個直角三角形加上一個小正方形，接下來再證明四個直角三角形可以再拼成兩個長方形，最後再證明兩個長方形加上一個小正方形的面積，剛好等於正方形 *KDES* 的面積加上正方形 *LOGF* 的面積。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●