勾股定理證明-G200

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

2. 在$\overline{AH}$上取一點F，使得$\overline{HF}=\overline{AC}=b$，以$\overline{HF}$為邊長向外作正方形$HFGO$.

3. 在$\overline{FG}$上取一點L，使得$\overline{GL}=\overline{BC}=a$，以$\overline{GL}$為邊長向外作正方形$GLDE$.

4. 在$\overline{GO}$上取一點T，使得$\overline{OT}=\overline{BC}=a$，連$\overline{TH}$, $\overline{TD}$.

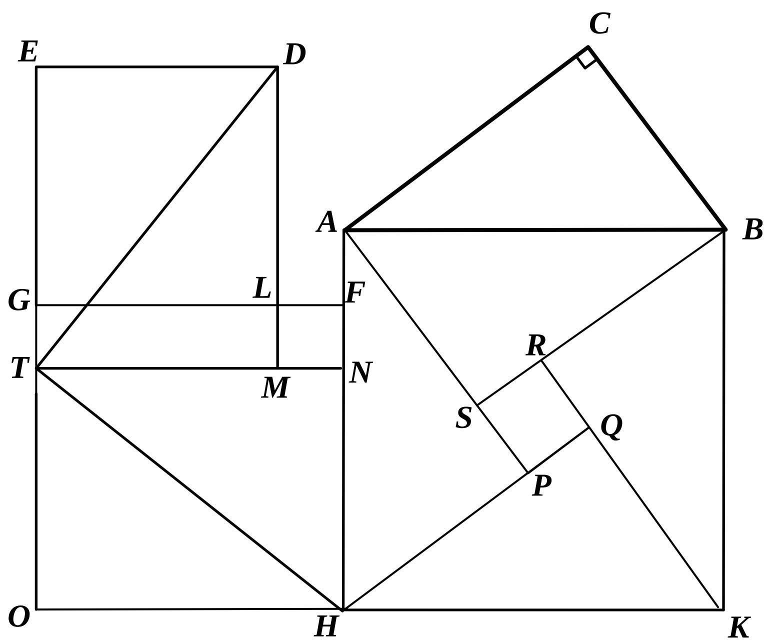
5. 過T點作垂直$\overline{FH}$的直線，交$\overline{FH}$於N點，$\overleftrightarrow{DL}$, $\overline{TN}$相交於M點。

6. 分別以A點, H點為圓心，$\overline{AC}$, $\overline{BC}$為半徑畫圓，兩圓相交於P點，連$\overline{PA}$, $\overline{PH}$.

7. 延長$\overline{HP}$至Q點，使得$\overline{HQ}=\overline{AC}=b$，連$\overline{QK}$.

8. 延長$\overline{KQ}$至R點，使得$\overline{KR}=\overline{AC}=b$，連$\overline{RB}$.

9. $\overleftrightarrow{BR}$, $\overline{AP}$相交於S點。



【求證過程】

以 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABKH$，證明正方形 $ABKH$ 面積等於正方形 $GLDE$ 的面積加上正方形 $HFGO$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 AHP 全等於三角形 DTM：

   因為 $\overline{AP}=\overline{AC}$, $\overline{HP}=\overline{BC}$, $\overline{AH}=\overline{AB}$，所以

   $$\Delta AHP \cong \Delta ABC \text{ (SSS 全等).}$$

   因為 $\overline{TM}=\overline{ED}=a=\overline{BC}$, $\overline{DM}=\overline{ET}=\overline{EO}-\overline{TO}=(a+b)-a=b=\overline{AC}$,

   $\angle DMT=90^{\circ}=\angle ACB$，所以

   $$\Delta DTM \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

   故

   $$\Delta AHP \cong \Delta DTM.$$

2. 證明三角形 HKQ 全等於三角形 TDE：

   設 $\angle CAB=x^{\circ}$, $\angle CBA=y^{\circ}$，且已知 $x^{\circ}+y^{\circ}=90^{\circ}$。因為

   $\angle QHK=90^{\circ}-\angle AHP=90^{\circ}-\angle CBA=\angle CAB$, $\overline{HQ}=\overline{AC}=b$, $\overline{HK}=\overline{AB}$，所以

   $$\Delta HKQ \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

   因為 $\overline{DE}=a=\overline{BC}$, $\overline{ET}=b=\overline{AC}$, $\angle TED=90^{\circ}=\angle ACB$，所以

   $$\Delta TDE \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等),}$$

   故

   $$\Delta HKQ \cong \Delta TDE.$$

3. 證明三角形 KBR 全等於三角形 HTO：

   因為 $\angle BKR=90^{\circ}-\angle HKQ=90^{\circ}-\angle CBA=\angle CAB$, $\overline{KR}=\overline{AC}=b$, $\overline{BK}=\overline{AB}$，所以

   $$\Delta KBR \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

   因為 $\overline{OT}=\overline{BC}=a$, $\overline{OH}=b=\overline{AC}$, $\angle TOH=90^{\circ}=\angle ACB$，所以

   $$\Delta HTO \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

   故

   $$\Delta KBR \cong \Delta HTO.$$

4. 證明三角形 BAS 全等於三角形 THN：

因為

$\angle ABS = 90^{\circ} - \angle KBR = 90^{\circ} - \angle CBA = \angle CAB$,

$\angle SAB = 90^{\circ} - \angle PAH = 90^{\circ} - \angle CAB = \angle CBA$, $\overline{BA} = \overline{AB}$，所以

$$\Delta BAS \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

因為 $\overline{NC} = \overline{TO} = a = \overline{BC}$, $\overline{TN} = \overline{OH} = b = \overline{AC}$, $\angle TNH = 90^{\circ} = \angle ACB$，所以

$$\Delta TNH \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

故

$$\Delta BAS \cong \Delta THN.$$

5. 證明四邊形 $PQRS$ 的面積等於四邊形 $FLMN$ 的面積：
四邊形 $PQRS$ 中，因為 $\Delta AHP \cong \Delta ABC$, $\Delta HKQ \cong \Delta ABC$, $\Delta KBR \cong \Delta ABC$，所以

$\angle APH = \angle ACB = 90^{\circ}$, $\angle QKH = \angle ACB = 90^{\circ}$, $\angle KRB = \angle ACB = 90^{\circ}$，可推得

$\angle SPQ = \angle PQR = \angle QRS = 90^{\circ}$，因此

$$\text{四邊形}PQRS\text{的四個內角都是直角，}$$

又因為 $\overline{PQ} = \overline{HQ} - \overline{HP} = b - a$, $\overline{QR} = \overline{KR} - \overline{KQ} = b - a$，所以

$$\text{四邊形}PQRS\text{是面積為}(b-a)^2\text{的正方形。}$$

四邊形 $FLMN$ 中，因為四個內角都是直角，$\overline{FL} = \overline{FG} - \overline{LG} = b - a$,

$\overline{LM} = \overline{GT} = \overline{GO} - \overline{TO} = b - a$，所以

$$\text{四邊形}PFLMN\text{是面積為}(b-a)^2\text{的正方形。}$$

故

$$\text{四邊形}PQRS\text{面積} = \text{四邊形}FLMN\text{面積。}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta AHP\text{面積} + \Delta HKQ\text{面積} + \Delta KBR\text{面積} + \Delta BAS\text{面積} + \text{四邊形}PQRS\text{面積}\\ &= \Delta DTM\text{面積} + \Delta TDE\text{面積} + \Delta HTO\text{面積} + \Delta THN\text{面積} + \text{四邊形}FLMN\text{面積}\\ &= \text{正方形}GLDE + \text{正方形}HFGO\text{面積，}\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 26 日想到的。

2. 心得：此證明將正方形 *ABKH* 面積切割成四個直角三角形以及一個小正方形，四個直角三角形可以再拼成兩個長方形，接著再證明兩個長方形加上一個小正方形的面積，剛好等於正方形 *GLDE* 的面積加上正方形 *HFGO* 的面積，是個滿特別的證明方式，切割的方式也很有美感。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●