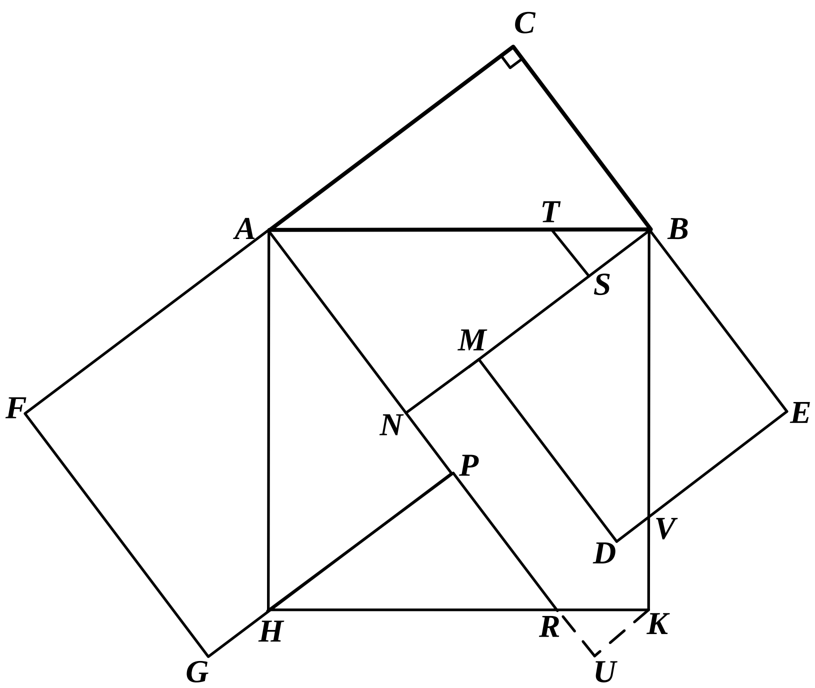
勾股定理證明-G199

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABKH$.
2. 延長 $\overline{CA}$ 至 F 點，使得 $\overline{AF}=\overline{CA}=b$.
3. 過 F 點作垂直 $\overline{AF}$ 的直線，在直線上取一點 G 點，使得 $\overline{FG}=\overline{AF}=b$.
4. 在 $\overleftrightarrow{GH}$ 上取一點 P ，使得 $\overline{AP}=\overline{AF}=b$.
5. 設 $\overleftrightarrow{AP}$, $\overline{HK}$ 相交於 R 點。
6. 延長 $\overline{CB}$ 至 E 點，使得 $\overline{BE}=\overline{CB}=a$ ，以 $\overline{BE}$ 為邊長作正方形 $BEDM$, $\overline{ED}$ 交 $\overline{BK}$ 於 V 點。
7. 設 $\overleftrightarrow{BM}$, $\overline{AP}$ 相交於 N 點。
8. 過 K 點作垂直 $\overleftrightarrow{AR}$ 的直線，與 $\overleftrightarrow{AR}$ 交於 U 點。
9. 在 $\overline{AB}$ 上取一點 T ，使得 $\overline{TB}=\overline{RK}$ ，過 T 點作垂直 $\overline{BM}$ 的直線，與 $\overline{BM}$ 交於 S 點。



【求證過程】

以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$面積等於正方形$BEDM$的面積加上正方形$AFGP$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形$AFGP$是面積為b^2的正方形：

設$\angle CAB = x^\circ,\ \angle CBA = y^\circ$，且已知$x^\circ + y^\circ = 90^\circ$。因為

$\angle PAH + \angle BAN = 90^\circ = \angle CAB + \angle BAN$，所以$\angle PAH = \angle CAB = x^\circ$，又$\overline{AP} = b = \overline{AC}$,

$\overline{AH} = \overline{AB}$，可推得

$$\Delta AHP \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)，}$$

即$\angle APH = \angle ACB = 90^\circ$。因為$\angle HAF = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - x^\circ = y^\circ$，所以

$\angle PAF = \angle PAH + \angle HAF = x^\circ + y^\circ = 90^\circ$。四邊形$AFGP$中，因為$\angle APG = 90^\circ$,

$\angle PAF = 90^\circ$，且已知$\angle AFG = 90^\circ$，所以

四邊形$AFGP$的四個內角都是直角，

又$\overline{AP} = \overline{AF} = b$，故

四邊形$AFGP$是面積為b^2的正方形。

2. 證明三角形HPR與三角形BVE全等：

因為$\Delta AHP \cong \Delta ABC$，所以$\overline{HP} = \overline{BC} = a$。因為

$\angle PHR = 90^\circ - \angle AHP = 90^\circ - \angle CBA = 90^\circ - y^\circ = x^\circ$且

$\angle EBV = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle CBA = 90^\circ - y^\circ = x^\circ$，所以$\angle PHR = \angle EBV$，又

$\overline{HP} = a = \overline{BE},\ \angle HPR = 90^\circ = \angle BEV$，故

$$\Delta HPR \cong \Delta BEV \text{ (ASA 全等).}$$

3. 證明三角形TBS與三角形RKU全等：

因為$\angle TBS = 90^\circ - \angle CBA = 90^\circ - y^\circ = x^\circ$,

$\angle RKU = 90^\circ - \angle KRU = 90^\circ - \angle HRP = 90^\circ - y^\circ = x^\circ$，所以 $\angle TBS = \angle RKU$，又因為

$\angle TSB = 90^\circ = \angle RUK$，$\overline{TB} = \overline{RK}$，所以

$$\Delta TBS \cong \Delta RKB \text{ (AAS 全等)}.$$

4. 證明四邊形 $BNUK$ 與四邊形 $AFGH$ 全等：

因為 $\angle ABN = \angle TBS = x^\circ = \angle CAB$，$\angle BNA = 90^\circ = \angle ACB$，$\overline{BA} = \overline{AB}$，所以

$$\Delta BAN \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)},$$

可推得

$$\overline{BN} = \overline{AC} = b.$$

四邊形 $BNUK$ 與四邊形 $AFGH$ 中，因為

$\angle KBN = 90^\circ - \angle TBS = 90^\circ - x^\circ = 90^\circ - \angle PAH = \angle HAF$，$\angle BNU = 90^\circ = \angle AFG$，

$\angle NUK = 90^\circ = \angle FGH$，所以

$$\text{四邊形}BNUK\text{與四邊形}AFGH\text{的四個內角都對應相等，}$$

又 $\overline{BK} = \overline{AH}$，$\overline{BN} = \overline{AC} = b = \overline{AF}$，因此

$$\text{四邊形}BNUK \cong \text{四邊形}AFGH.$$

5. 證明四邊形 $ANST$ 與四邊形 $BMDV$ 全等：

四邊形 $ANST$ 與四邊形 $BMDV$ 中，因為 $\angle TAN = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - x^\circ = y^\circ = \angle VBM$，

$\angle ANS = 90^\circ = \angle BMD$，$\angle NST = 90^\circ = \angle MDV$，所以

$$\text{四邊形}ANST\text{與四邊形}BMDV\text{的四個內角都對應相等，}$$

又因為 $\overline{AT} = \overline{AB} - \overline{TB} = \overline{HK} - \overline{RK} = \overline{HR}$，$\Delta HPR \cong \Delta BEV$，$\overline{HR} = \overline{BV}$，所以 $\overline{AT} = \overline{BV}$。

因為 $\Delta BAN \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{AN} = \overline{BC} = a = \overline{BM}$，因此

$$\text{四邊形}ANST \cong \text{四邊形}BMDV.$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{四邊形}ANST\text{面積} + \Delta TBS\text{面積} + \Delta AHP\text{面積} + \Delta HPR\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}BNRK\text{面積} \\
&= \text{四邊形}BMDV\text{面積} + \Delta RKU\text{面積} + \Delta AHP\text{面積} + \Delta BEV\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}BNRK\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}BMDV\text{面積} + \Delta BEV\text{面積}) + (\Delta RKU\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}BNRK\text{面積}) + \Delta AHP\text{面積} \\
&= \text{正方形}BEDM\text{面積} + \text{四邊形}BNUK\text{面積} + \Delta AHP\text{面積} \\
&= \text{正方形}BEDM\text{面積} + \text{四邊形}AFGH\text{面積} + \Delta AHP\text{面積} \\
&= \text{正方形}BEDM\text{面積} + \text{正方形}AFGP\text{面積}，
\end{aligned}
$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 26 日想到的。
2. 心得：此證明利用切割的方法，將正方形 $ABKH$ 切割成若干區塊，再證明這些區塊的面積等於正方形 $BEDM$ 的面積加上正方形 $AFGP$ 的面積，就能得到三個正方形的面積關係，進而推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：

(1) 在魯米斯書中所繪的圖形並沒有 U 點，有 U 點是為了方便證明三角形 TBS 的面積加上四邊形 $BNRK$ 的面積等於四邊形 $AFGH$ 的面積。先證明三角形 TBS 與三角形 RKU 全等，再證明四邊形 $BNUK$ 與四邊形 $AFGH$ 全等，就能證得三角形 TBS 的面積加上四邊形 $BNRK$ 的面積等於四邊形 $AFGH$ 的面積。

(2) 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：