勾股定理證明-G198

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

2. $\overline{AH}$上取一點S，使得$\overline{HS}=\overline{AC}=b$，以$\overline{HS}$為邊長向外作正方形$HSFG$.

3. $\overline{BK}$上取一點T，使得$\overline{KT}=\overline{BC}=a$，以$\overline{KT}$為邊長向外作正方形$KTED$.

4. 過D點作平行$\overline{BC}$的直線，交$\overline{TE}$於U點。

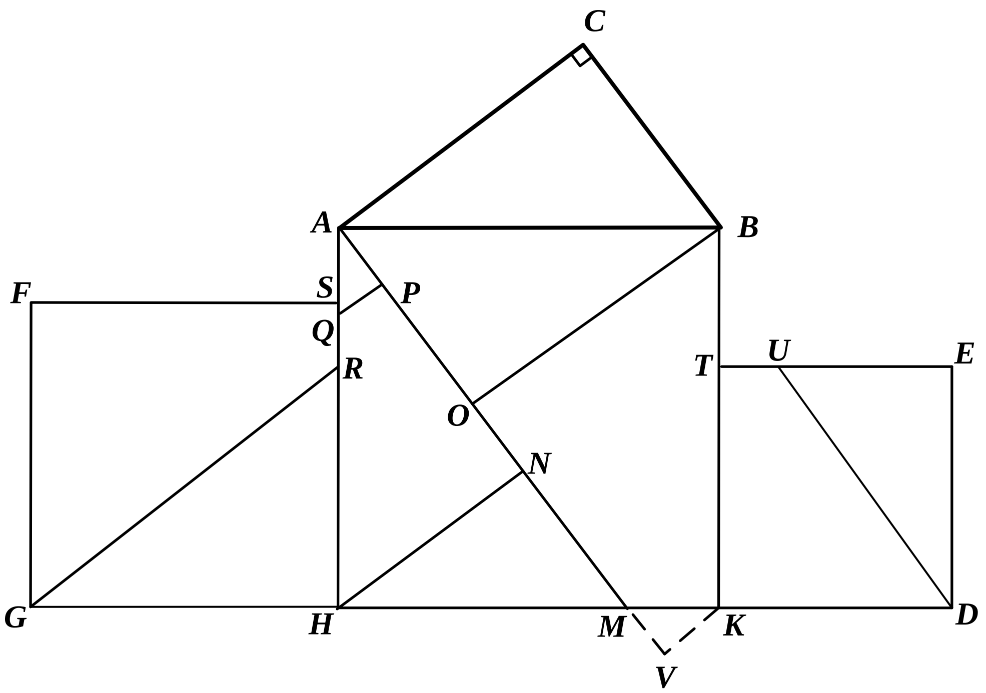
5. 過A點作平行$\overline{CB}$的直線，交$\overline{KH}$於M點。

6. 分別過H點, B點作平行$\overline{AC}$的直線，交$\overline{AM}$於N點, O點。

7. $\overline{AM}$上取一點P，使得$\overline{NP}=\overline{BC}$，過$P$點作平行$\overline{AC}$的直線，交$\overline{AH}$於$Q$點。

8. 過G點作平行$\overline{AC}$的直線，交$\overline{AH}$於R點。

9. 過K點作垂直$\overleftrightarrow{AM}$的直線，交$\overleftrightarrow{AM}$於V點。



【求證過程】

以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$面積等於正方形$HSFG$的面積加上正方形$KTED$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形BAO與三角形GRH全等：

   設$\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知$x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$。因為$\overline{BO} // \overline{AC}$，所以

   $\angle CBA + \angle ABD = 90^{\circ}$, $\angle ABO = 90^{\circ} - \angle CBA = x^{\circ} = \angle CAB$。因為$\overline{AB} // \overline{HK}$，所以

   $\angle BAO = \angle AMH$，又因為$\overline{AM} // \overline{CB}$，所以$\angle CBA = \angle AMH$，可推得$\angle BAO = \angle CBA$，

   又$\overline{BA} = \overline{AB}$，因此

   $$\Delta BAO \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

   因為$\overline{RG} // \overline{AC}$，所以$\angle RGH = \angle CAB$，又$\angle RHG = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{GH} = b = \overline{AH}$，因此

   $$\Delta GRH \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

   故

   $$\Delta BAO \cong \Delta GRH .$$

2. 證明三角形AHN與三角形ABC全等：

   因為$\overline{NH} // \overline{AC}$，所以$\angle NHM = \angle CAB = x^{\circ}$。又因為

   $\angle AHN = 90^{\circ} - \angle NHM = 90^{\circ} - \angle CAB = y^{\circ} = \angle CBA$, $\overline{AH} = c = \overline{AB}$，所以

   $$\Delta AHN \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 證明三角形HMN與三角形DUE全等：

   因為$\overline{AM} // \overline{CB}$，所以$\angle NMH = \angle CBA = y^{\circ}$。因為$\overline{UD} // \overline{CB}$，所以$\angle UDK = \angle CBA = y^{\circ}$，又因為$\angle EUD = \angle UDK$，所以

   $$\angle NMH = \angle EUD = y^{\circ}.$$

   因為$\Delta AHN \cong \Delta ABC$，所以$\overline{HN} = \overline{BC} = a$，又

   $\angle NHM = x^{\circ} = 90^{\circ} - y^{\circ} = 90^{\circ} - \angle EUD = \angle EDU$，因此

   $$\Delta HMN \cong \Delta DUE \text{ (AAS 全等)}.$$

4. 證明四邊形$PNHQ$與四邊形$TKDU$全等：

   因為$\angle QHN = y^{\circ} = \angle UDK$, $\angle QPN = 90^{\circ} = \angle UTK$, $\angle PNH = 90^{\circ} = \angle TKD$，所以

$$\text{四邊形}PNHQ\text{與四邊形}TKDU\text{的四個內角都對應相等，}$$

又 $\overline{PN}=a=\overline{TK}$, $\overline{NH}=a=\overline{KD}$，因此

$$\text{四邊形}PNHQ \cong \text{四邊形}TKDU.$$

5. 證明四邊形 $BOVK$ 與四邊形 $GFSR$ 全等：

   因為 $\angle KBO=\angle CBA=y^\circ=90^o-x^\circ=90^\circ-\angle RGH=\angle RGF$, $\angle BOV=90^\circ=\angle GFS$,

   $\angle OVK=90^\circ=\angle FSR$ ，所以

$$\text{四邊形 }BOVK\text{ 與四邊形 }GFSR\text{ 中四個角都對應相等。}$$

   因為 $\Delta BAO\cong\Delta ABC$，所以 $\overline{BO}=b=\overline{GF}$ ，又因為 $\Delta GRH\cong\Delta ABC$ ，所以 $\overline{GR}=c=\overline{AB}$ ，因此

$$\text{四邊形}BOVK \cong \text{四邊形}GFSR.$$

6. 證明三角形 AQP 與三角形 KMV 全等：

   因為四邊形$BOVK\cong$四邊形$GFSR$ ，所以 $\overline{VK}=\overline{SR}=b-a=\overline{AN}-\overline{PN}=\overline{AP}$ 。又

   $\angle APQ=90^\circ=\angle KVM$, $\angle PAQ=x^\circ=90^\circ-y^\circ=90^\circ-\angle KMV=\angle VKM$ ，因此

$$\Delta AQP\cong\Delta KMV \text{ (ASA 全等).}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta BAO\text{面積}+\Delta AQP\text{面積}+\text{四邊形}PNHQ\text{面積}\\
&\quad +\Delta HMN\text{面積}+\text{四邊形}BOMK\text{面積}\\
&= \Delta GRH\text{面積}+\Delta KMV\text{面積}+\text{四邊形}UTKD\text{面積}\\
&\quad +\Delta DUE\text{面積}+\text{四邊形}BOMK\text{面積}\\
&= \Delta GRH\text{面積}+(\Delta KMV\text{面積}+\text{四邊形}BOMK\text{面積})\\
&\quad +(\Delta DUE\text{面積}+\text{四邊形}UTKD\text{面積})\\
&= \Delta GRH\text{面積}+\text{四邊形}BOVK\text{面積}+\text{正方形}KTED\text{面積}\\
&= \Delta GRH\text{面積}+\text{四邊形}GFSR\text{面積}+\text{正方形}KTED\text{面積}\\
&= \text{正方形}HSFG\text{面積}+\text{正方形}KTED\text{面積，}
\end{aligned}$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 18 日想到的。

2. 心得：此證明利用切割的方法，將正方形 *ABKH* 切割成五個區塊，再證明這五個區塊的面積等於正方形 *HSFG* 的面積加上正方形 *KTED* 的面積，就能得到三個正方形的面積關係，進而推導出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：

(1) 在魯米斯書中所繪的圖形並沒有 *V* 點，有 *V* 點是為了方便證明三角形 *AQP* 的面積加上四邊形 *BOMK* 的面積等於四邊形 *GFSR* 的面積。先證明三角形 *AQP* 與三角形 *KMV* 全等，再證明四邊形 *BOVK* 與四邊形 *GFSR* 全等，就能證得三角形 *AQP* 的面積加上四邊形 *BOMK* 的面積等於四邊形 *GFSR* 的面積。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：