勾股定理證明-G197

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

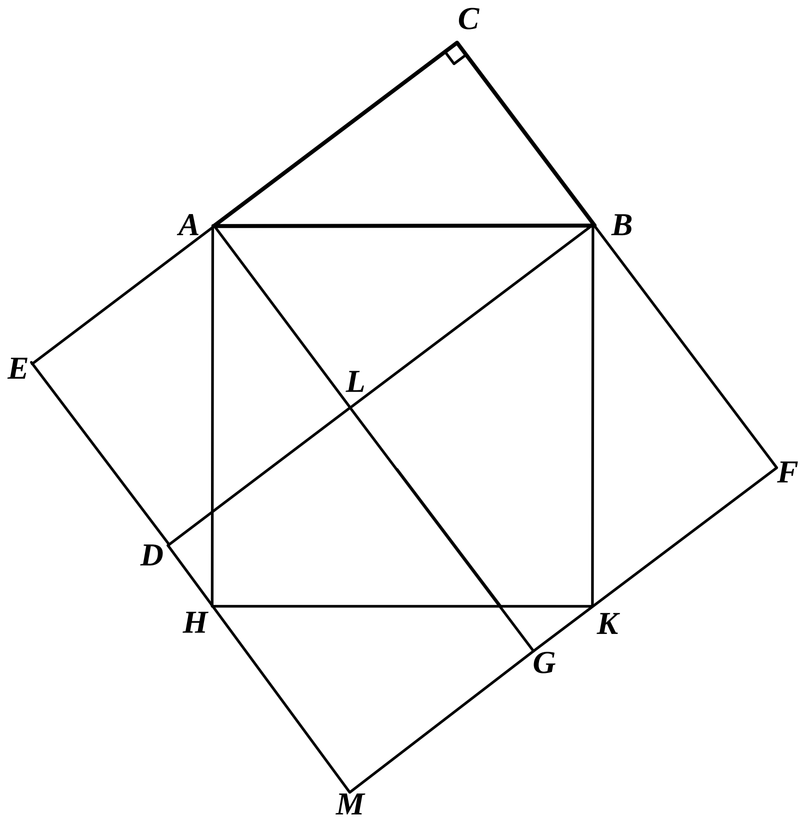
2. 延長$\overline{CA}$至E點，使得$\overline{AE}=\overline{CB}=a$，以$\overline{AE}$為邊長向內作正方形$AEDL$.

3. 連$\overline{BL}$.

4. 延長$\overline{CB}$至F點，使得$\overline{BF}=\overline{CA}=b$.

5. $\overleftrightarrow{FK}$, $\overleftrightarrow{DH}$相交於M點。

6. 過L點作垂直$\overleftrightarrow{FK}$的直線，交$\overleftrightarrow{FK}$於G點。



【求證過程】

以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$面積等於正方形$AEDL$的面積加上正方形$BLGF$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形 $BLGF$ 是面積為 b^2 的正方形：

設 $\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知 $x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$。因為

$\angle BAL = 90^{\circ} - \angle CAB = 90^{\circ} - x^{\circ} = y^{\circ} = \angle CBA$, $\overline{BA} = \overline{AB}$, $\overline{AL} = \overline{BC}$，所以

$$\Delta BAL \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

即 $\overline{BL} = \overline{AC} = b$, $\angle BLA = 90^{\circ}$, $\angle LBA = x^{\circ}$，且

$$\Delta BAL\text{面積} = \Delta ABC\text{面積}。$$

因為 $\angle FBK = 90^{\circ} - \angle CBA = 90^{\circ} - y^{\circ} = x^{\circ} = \angle CAB$, $\overline{BF} = \overline{CA} = b$, $\overline{BK} = \overline{AB} = c$，所以

$$\Delta BKF \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等),}$$

即 $\angle BFK = \angle ACB = 90^{\circ}$，且

$$\Delta BKF\text{面積} = \Delta ABC\text{面積}。$$

四邊形 $BLGF$ 中，因為 $\angle CBL = \angle CBA + \angle LBA = y^{\circ} + x^{\circ} = 90^{\circ}$，所以 $\angle FBL = 90^{\circ}$，又

$\angle BFK = 90^{\circ}$, $\angle LGF = 90^{\circ}$，可推得

$$\text{四邊形}BLGF\text{的四個內角都是直角，}$$

又 $\overline{BL} = b$, $\overline{BF} = b$，故

$$\text{四邊形}BLGF\text{是面積為}b^2\text{的正方形。}$$

2. 證明三角形 HAE 與三角形 ABC 全等：

ΔHAE 與 ΔABC 中，因為 $\overline{AH} = c = \overline{AB}$, $\overline{AE} = a = \overline{CB}$, $\angle AEH = 90^{\circ} = \angle BCA$，所以

$$\Delta HAE \cong \Delta ABC \text{ (RHS 全等).}$$

3. 證明三角形 KHM 與三角形 ABC 全等：

因為 $\Delta BKF \cong \Delta ABC$，所以 $\angle BKF = \angle ABC = y^{\circ}$，可推得

$\angle MKH = 90^{\circ} - \angle BKF = 90^{\circ} - y^{\circ} = x^{\circ} = \angle CAB$，又因為 $\Delta HAE \cong \Delta ABC$，所以

$\angle EHA = \angle CAB = x^{\circ}$，可推得 $\angle MHK = 90^{\circ} - \angle EHA = 90^{\circ} - x^{\circ} = y^{\circ} = \angle CBA$，又

$\overline{HK}=c=\overline{AB}$，因此

$$\Delta KHM \cong \Delta ABC \text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明四邊形 $LDMG$ 為長方形且面積等於三角形面積的兩倍：
   四邊形 $LDMG$ 中，因為
   $\angle GLD=360^{\circ}-\angle ALB-\angle ALD-\angle BLG=360^{\circ}-90^{\circ}-90^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$,
   $\angle LDM=180^{\circ}-\angle LDE=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$, $\angle LGM=180^{\circ}-\angle LGF=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$，所以四邊形 $LDMG$ 的四個內角都是直角，可推得四邊形 $LDMG$ 為長方形，因此

$$\begin{aligned}\text{長方形}LDMG&=\overline{LD}\times\overline{LG}\\&=ab\\&=2\Delta ABC\text{面積。}\end{aligned}$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積}&=\text{四邊形}CEMF\text{面積-}\Delta ABC\text{面積-}\Delta HAE\text{面積-}\Delta KHM\text{面積-}\Delta BKF\text{面積}\\&=\text{四邊形}CEMF\text{面積-}\Delta ABC\text{面積-}\Delta ABC\text{面積-}\Delta ABC\text{面積-}\Delta ABC\text{面積}\\&=\text{四邊形}CEMF\text{面積-}\Delta ABC\text{面積-}\Delta BAL\text{面積-}2\Delta ABC\text{面積}\\&=\text{四邊形}CEMF\text{面積-四邊形}ACBL\text{面積-長方形}LDMG\text{面積}\\&=\text{正方形}AEDL\text{面積}+\text{正方形}BLGF\text{面積，}\end{aligned}$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Walter Lietzmann (1930). *Der pythagoreische Lehrsatz*. Leipzig & Berlin : Teubner.Leitzmann, 20.

2. 心得：此證明的輔助圖恰好為一個大正方形，證明的方式為利用正方形 $ABKH$ 面積等於四邊形 $CEMF$ 面積減去四個三角形的面積，而四邊形 $CEMF$ 面積減去四個三角形的面積恰好等於正方形 $AEDL$ 的面積加上正方形 $BLGF$ 的面積，就能推導出正方形 $ABKH$ 面積等於正方形 $AEDL$ 的面積加上正方形 $BLGF$ 的面積，進而得到勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●