勾股定理證明-G196

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

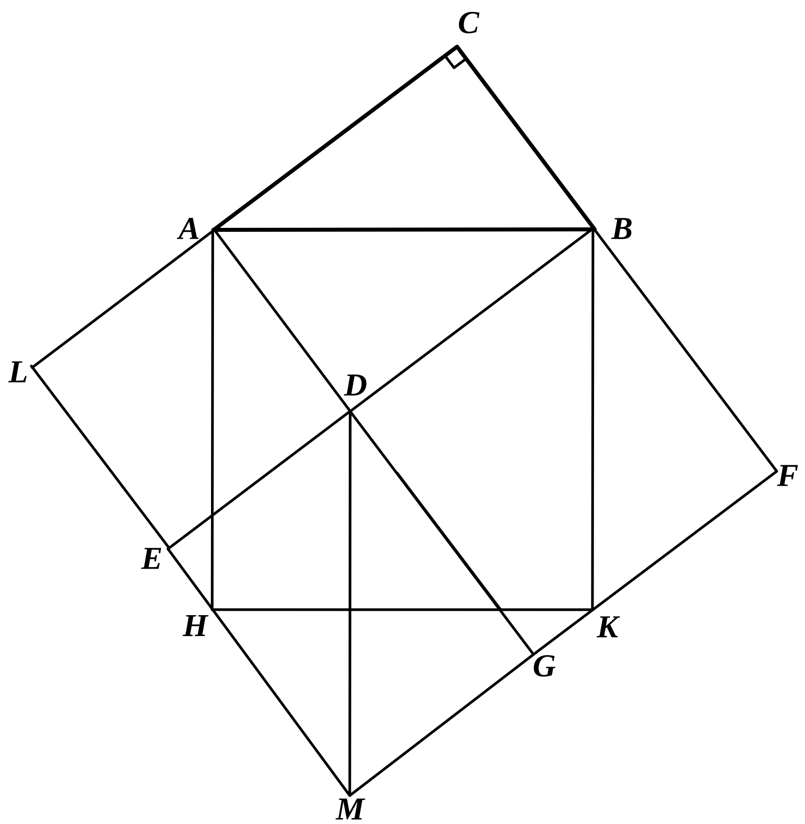
2. 延長$\overline{CA}$至L點，使得$\overline{AL}=\overline{CB}=a$，以$\overline{AL}$為邊長向內作正方形$ALED$.

3. 連$\overline{BD}$.

4. 延長$\overline{CB}$至F點，使得$\overline{BF}=\overline{CA}=b$.

5. $\overleftrightarrow{FK}$, $\overleftrightarrow{EH}$相交於M點，連$\overline{DM}$.

6. 過D作垂直$\overleftrightarrow{FK}$的直線，交$\overleftrightarrow{FK}$於G點。



【求證過程】

以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$面積等於正方形$ALED$的面積加上正方形$BFGD$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形 $BDGF$ 是正方形且面積為 b^2：

設 $\angle CAB = x^{\circ}, \angle CBA = y^{\circ}$，且已知 $x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$。因為

$\angle BAD = 90^{\circ} - \angle CAB = 90^{\circ} - x^{\circ} = y^{\circ} = \angle CBA, \overline{BA} = \overline{AB}, \overline{AD} = \overline{BC}$，所以

$$\Delta BAD \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

即 $\overline{BD} = \overline{AC} = b, \angle BDA = \angle ACB = 90^{\circ}, \angle DBA = \angle CAB = x^{\circ}$，且

$$\Delta BAD\text{面積} = \Delta ABC\text{面積}。$$

因為 $\angle FBK = 90^{\circ} - \angle CBA = 90^{\circ} - y^{\circ} = x^{\circ} = \angle CAB, \overline{BF} = \overline{CA} = b, \overline{BK} = \overline{AB} = c$，所以

$$\Delta BKF \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

即 $\angle BFK = \angle ACB = 90^{\circ}$，且

$$\Delta BKF\text{面積} = \Delta ABC\text{面積}。$$

四邊形 $BDGF$ 中，因為 $\angle CBD = \angle CBA + \angle DBA = y^{\circ} + x^{\circ} = 90^{\circ}$，所以 $\angle FBD = 90^{\circ}$，又

$\angle BFK = 90^{\circ}, \angle DGF = 90^{\circ}$，可推得

$$\text{四邊形}BDGF\text{的四個內角都是直角，}$$

又 $\overline{BD} = b, \overline{BF} = b$，故

$$\text{四邊形}BDGF\text{是面積為}b^2\text{的正方形。}$$

2. 證明三角形 HAL 與三角形 ABC 全等：

ΔHAL 與 ΔABC 中，因為 $\overline{AH} = c = \overline{AB}, \overline{AL} = a = \overline{CB}, \angle ALH = 90^{\circ} = \angle BCA$，所以

$$\Delta HAL \cong \Delta ABC \text{ (RHS 全等)}.$$

3. 證明三角形 KHM 與三角形 ABC 全等：

因為 $\Delta BKF \cong \Delta ABC$，所以 $\angle BKF = \angle ABC = y^{\circ}$，可推得

$\angle MKH = 90^{\circ} - \angle BKF = 90^{\circ} - y^{\circ} = x^{\circ} = \angle CAB$，又因為 $\Delta HAL \cong \Delta ABC$，所以

$\angle LHA = \angle CAB = x^{\circ}$，可推得 $\angle MHK = 90^{\circ} - \angle LHA = 90^{\circ} - x^{\circ} = y^{\circ} = \angle CBA$，又

$\overline{HK} = c = \overline{AB}$，因此

$$\Delta KHM \cong \Delta ABC \text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明四邊形 $DEMG$ 是長方形且面積為三角形 ABC 的兩倍：

   四邊形 $DEMG$ 中，因為

   $\angle GDE = 360^\circ - \angle ADB - \angle ADE - \angle BDG = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$

   $\angle DEM = 180^\circ - \angle DEL = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,\ \angle DGM = 180^\circ - \angle DGF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$，

   所以

   $$\text{四邊形}DEMG\text{的四個內角都是直角，}$$

   可推得

   $$\text{四邊形}DEMG\text{為長方形。}$$

   故

   $$\begin{aligned}\text{長方形}DEMG\text{面積} &= \overline{DE} \times \overline{DG} \\ &= a \times b \\ &= 2\Delta ABC\text{面積。}\end{aligned}$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

   $$\begin{aligned}\text{四邊形}CLMF\text{面積} &= \text{正方形}ABKH\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} + \Delta HAL\text{面積} + \Delta KHM\text{面積} + \Delta BKF\text{面積} \\ &= \text{正方形}ABKH\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} \\ &= \text{正方形}ABKH\text{面積} + 4\Delta ABC\text{面積。}\end{aligned}$$

   又

   $$\begin{aligned}\text{四邊形}CLMF\text{面積} &= \text{正方形}ALED\text{面積} + \text{正方形}BDGF\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} \\ &\quad + \Delta BAD\text{面積} + \text{長方形}DEMG\text{面積} \\ &= \text{正方形}ALED\text{面積} + \text{正方形}BDGF\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} \\ &\quad + \Delta ABC\text{面積} + 2\Delta ABC\text{面積} \\ &= \text{正方形}ALED\text{面積} + \text{正方形}BDGF\text{面積} + 4\Delta ABC\text{面積。}\end{aligned}$$

   故

   $$\text{正方形}ABKH\text{面積} = \text{正方形}ALED\text{面積} + \text{正方形}BDGF\text{面積，}$$

   即

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis)在他的著作《勾股定理》中提到，此證明過程記載於 Journal of Education, V. XXVII, 1888, p. 327, 17th proof.
2. 心得：此證明利用四邊形 $CLMF$ 面積有兩種表示方式，一種是正方形 $ABKH$ 面積加上 $4\Delta ABC$ 面積，另一種是正方形 $ALED$ 面積加上正方形 $BFGD$ 面積加上 $4\Delta ABC$ 面積，因此，得到正方形 $ABKH$ 面積等於正方形 $ALED$ 面積加上正方

形 *BFGD* 面積，最後推導出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●