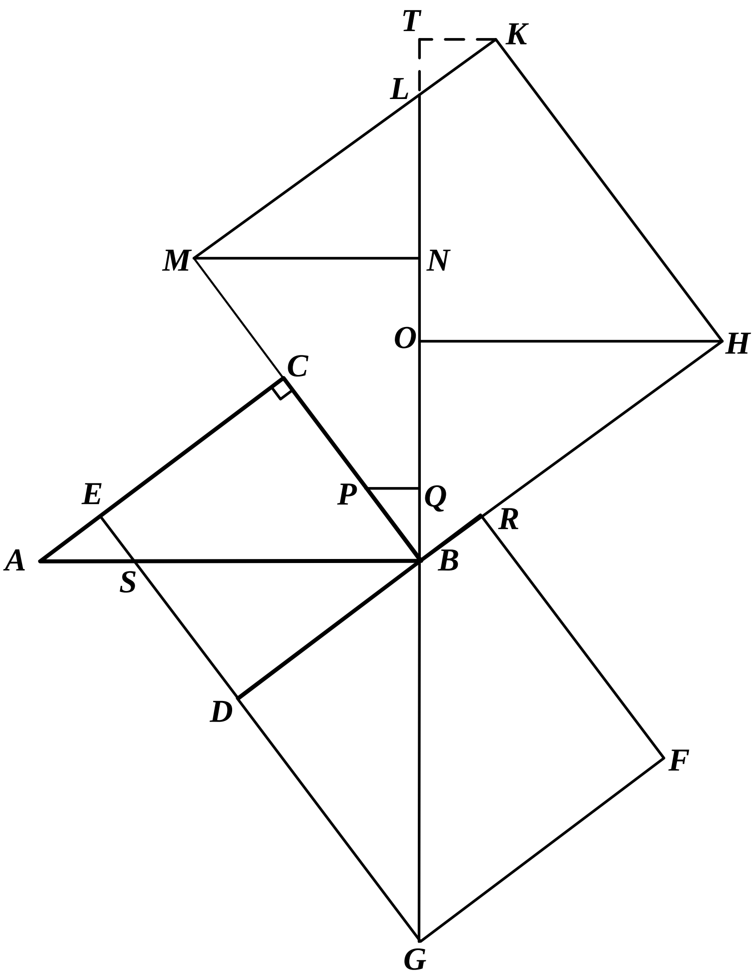
勾股定理證明-G195

【作輔助圖】

1. 以$\overline{CB}$為邊長向內作正方形$CBDE$, $\overline{DE}$交$\overline{AB}$於S點。
2. 直線BC上取一點M使得$\overline{BM}=\overline{BA}=c$，以$\overline{BM}$為邊長向內作正方形$BMKH$.
3. $\overline{BH}$上取一點R使得$\overline{DR}=\overline{AC}=b$，以$\overline{DR}$為邊長向內作正方形$DRFG$.
4. 作直線GB，交$\overline{MK}$於L點。
5. 過M點作垂直$\overline{BL}$的直線，交$\overline{BL}$於N點。
6. 過H點作垂直$\overline{BL}$的直線，交$\overline{BL}$於O點。
7. $\overline{BL}$上取一點Q使得$\overline{BQ}=\overline{AE}$，過$Q$點作垂直$\overline{BL}$的直線，交$\overline{BC}$於$P$點。
8. 過K點作垂直直線BL的直線，交直線BL於T點，連$\overline{KT}$, $\overline{TL}$.



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的 $\overline{CB}$ 為邊長向內作正方形 $CBDE$ ，以 $\overline{MB}$ 為邊長向外作正方形 $BMKH$ ，再以 $\overline{DR}$ 為邊長向外作正方形 $DRFG$ ，證明正方形 $BMKH$ 所切割出的所有區塊面積總和等於正方形 $CBDE$ 的面積加上正方形 $DRFG$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 HBO 與三角形 GBD 全等：

設 $\angle CAB = x^\circ$, $\angle CBA = y^\circ$ ，且已知 $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$ 。因為 $\angle GDB = 90^\circ = \angle ACB$,

$\overline{BD} = a = \overline{BC}$, $\overline{DG} = b = \overline{CA}$ ，所以

$$\Delta GBD \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

即 $\angle DBG = \angle CBA = y^\circ$, $\overline{BG} = \overline{BA} = c$ 。因為 $\angle HBO = \angle GBD = y^\circ$ (對頂角相等),

$\angle HOB = 90^\circ = \angle GDB$, $\overline{BH} = c = \overline{BG}$ ，所以

$$\Delta HBO \cong \Delta GBD \text{ (AAS 全等).}$$

2. 證明四邊形 $MNQP$ 面積等於四邊形 $BCES$ 面積：

在 ΔBMN 與 ΔABC 中，因為 $\angle NBM = 180^{\circ} - 90^{\circ} - \angle GBD = 90^{\circ} - y^{\circ} = x^{\circ} = \angle CAB$,

$\angle BNM = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{BM} = c = \overline{AB}$, $\overline{HK} = c = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta BMN \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

又因為 $\angle PBQ = x^{\circ} = \angle SAE$, $\angle PQB = 90^{\circ} = \angle SEA$, $\overline{BQ} = \overline{AE}$ ，所以

$\Delta PQB \cong \Delta SEA$ (ASA 全等)，故

$$\begin{aligned} \text{四邊形}MNQP\text{面積} &= \Delta BMN\text{面積} - \Delta PQB\text{面積} \\ &= \Delta ABC\text{面積} - \Delta SEA\text{面積} \\ &= \text{四邊形}BCES\text{面積。} \end{aligned}$$

3. 證明三角形 LMN 與三角形 SBD 全等：

因為 $\Delta BMN \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{MN} = \overline{BC} = a = \overline{BD}$ ，又因為 $\angle LNM = 90^{\circ} = \angle SDB$,

$\angle LMN = 90^{\circ} - \angle NMB = 90^{\circ} - \angle CBA = \angle SBD$ ，所以

$$\Delta LMN \cong \Delta SBD \text{ (ASA 全等).}$$

4. 證明三角形 PQB 與三角形 LTK 全等：

因為 $\Delta LMN \cong \Delta SBD$ ，所以 $\overline{LM} = \overline{SB}$ ， $\overline{KL} = \overline{KM} - \overline{LM} = c - \overline{LM} = \overline{AB} - \overline{SB} = \overline{AS}$ ，又

因為 $\angle KTL = 90^{\circ} = \angle SEA$, $\angle KLT = \angle NLM = 90^{\circ} - \angle LMN = 90^{\circ} - x^{\circ} = \angle ESA$ ，所以

$$\Delta LTK \cong \Delta SEA \text{ (AAS 全等),}$$

又 $\Delta PQB \cong \Delta SEA$ ，故

$$\Delta PQB \cong \Delta LTK.$$

5. 證明四邊形 $KTOH$ 與四邊形 $BRFG$ 全等：

四邊形 $KTOH$ 與四邊形 $BRFG$ 中，因為 $\angle KTO = 90^{\circ} = \angle BRF$, $\angle TOH = 90^{\circ} = \angle RFG$,

$\angle KHO = 90^{\circ} - \angle OHB = 90^{\circ} - \angle DGB = \angle BGF$ ，所以

$$\text{四邊形}KTOH\text{與四邊形}BRFG\text{的四個內角都對應相等。}$$

因為 $\Delta GBD \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{BG} = \overline{BA} = c = \overline{KH}$ ，又因為 $\Delta HBO \cong \Delta GBD$ ，所以

$\overline{HO} = \overline{GD} = \overline{GF}$ ，故

$$\text{四邊形}KTOH \cong \text{四邊形}BRFG.$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}BMKH\text{面積} &= \text{四邊形}KLOH\text{面積} + \Delta HBO\text{面積} + \Delta LMN\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}MNQP\text{面積} + \Delta PQB\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}KLOH\text{面積} + \Delta PQB\text{面積}) + \Delta HBO\text{面積} \\
&\quad + \Delta LMN\text{面積} + \text{四邊形}MNQP\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}KLOH\text{面積} + \Delta LTK\text{面積}) + \Delta GBD\text{面積} \\
&\quad + \Delta SBD\text{面積} + \text{四邊形}BCES\text{面積} \\
&= \text{四邊形}BRFG\text{面積} + \Delta GBD\text{面積} + \Delta SBD\text{面積} + \text{四邊形}BCES\text{面積} \\
&= \text{正方形}DRFG\text{面積} + \text{正方形}CBDE\text{面積}，
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 18 日想到的。
2. 心得：此證明利用切割的方法，將正方形 $BMKH$ 切割成五個區塊，再證明這五個區塊的面積等於正方形 $CBDE$ 的面積加上正方形 $DRFG$ 的面積，就能得到三個正方形的面積關係，進而推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：

(1) 在魯米斯書中所繪的圖形並沒有 T 點，有 T 點是為了方便證明三角形 PQB 的面積加上四邊形 $KLOH$ 的面積等於四邊形 $BRFG$ 的面積。先證明三角形 PQB 與三角形 LTK 全等，再證明四邊形 $KTOH$ 與四邊形 $BRFG$ 全等，就能證得三角形 PQB 的面積加上四邊形 $KLOH$ 的面積等於四邊形 $BRFG$ 的面積。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：