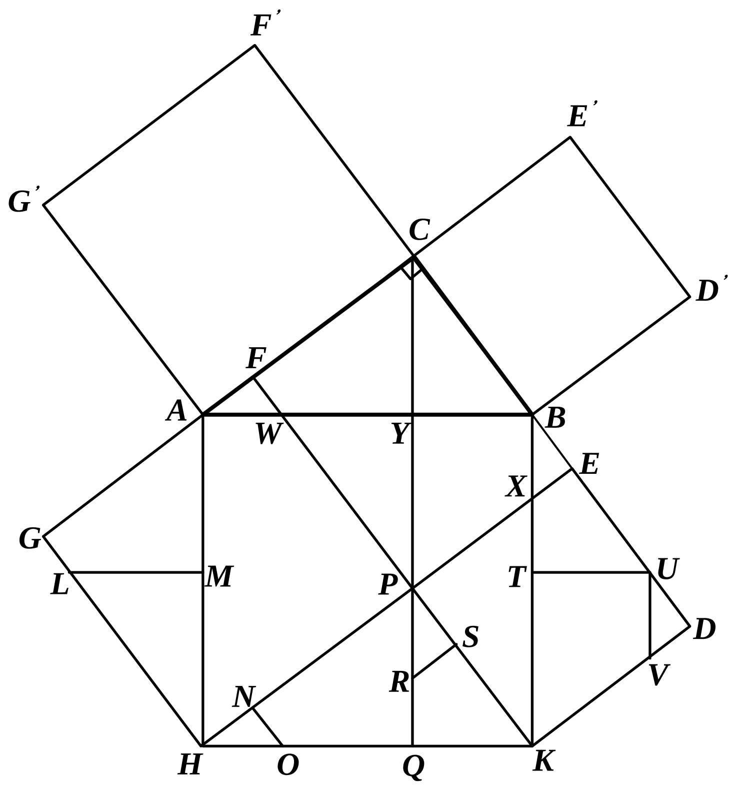
勾股定理證明-G194

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABKH$.
2. 延長 $\overline{CA}$ 至 G 點使得 $\overline{AG}=\overline{BC}$ ，連 $\overline{GH}$.
3. 過 C 點作垂直 $\overline{AB}$ 的直線，交 $\overline{AB}$ 於 Y 點，交 $\overline{HK}$ 於 Q 點。
4. 延長 $\overline{CB}$ 至 D 點使得 $\overline{BD}=\overline{AC}$ ，連 $\overline{DK}$.
5. $\overline{CA}$ 上取一點 F 使得 $\overline{CF}=\overline{CB}$.
6. 過 F 點作垂直 $\overline{AC}$ 的直線，交 $\overline{AB}$ 於 W 點，交 $\overline{CQ}$ 於 P 點，連 $\overline{PH}$.
7. 過 P 點作垂直 $\overline{BD}$ 的直線，交 $\overline{BD}$ 於 E 點，交 $\overline{BK}$ 於 X 點，連 $\overline{PK}$.
8. 在 $\overline{GH}$ 上取一點 L 使得 $\overline{HL}=\overline{WP}$ ，過 L 點作垂直 $\overline{AH}$ 的直線，交 $\overline{AH}$ 於 M 點。
9. 在 $\overline{DE}$ 上取一點 U 使得 $\overline{DU}=\overline{EB}$ ，過 U 點作垂直 $\overline{BK}$ 的直線，交 $\overline{BK}$ 於 T 點。
10. 過 U 點作平行 $\overline{BK}$ 的直線，交 $\overline{DK}$ 於 V 點。
11. $\overline{HK}$ 上取一點 O 使得 $\overline{HO}=\overline{AW}$.
12. $\overline{PQ}$ 上取一點 R 使得 $\overline{PR}=\overline{UV}$.
13. 過 O 點作垂直 $\overline{PH}$ 的直線，交 $\overline{PH}$ 於 N 點。
14. 過 R 點作垂直 $\overline{PK}$ 的直線，交 $\overline{PK}$ 於 S 點。
15. 以 $\overline{AC}$ 為邊長向外作正方形 $ACF'G'$.
16. 以 $\overline{CB}$ 為邊長向外作正方形 $CBD'E'$.



【求證過程】

分別以直角三角形ABC的三邊向外作正方形$CBD'E'$、正方形$ACF'G'$與正方形$ABKH$，正方形$ABKH$面積等於長方形$AYQH$的面積加上長方形$PKQY$的面積，證明長方形$AYQH$的面積等於正方形$ACF'G'$的面積，同時長方形$PKQY$的面積也與正方形$CBD'E'$的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形NHO全等於三角形FAW：

設$\angle CAB = x^\circ, \angle CBA = y^\circ$，且已知$x^\circ + y^\circ = 90^\circ$。因為$\overline{CP} // \overline{AH}$，所以

$\angle CAH + \angle AHP = 180^\circ, \angle AHP = 180^\circ - \angle CAH = 180^\circ - x^\circ - 90^\circ = y^\circ$，可推得

$\angle NHO = 90^\circ - \angle AHP = 90^\circ - y^\circ = x^\circ$。因為$\angle NHO = x^\circ = \angle FAW$,

$\angle HNO = 90^\circ = \angle AFW, \overline{HO} = \overline{AW}$，所以

$$\Delta NHO \cong \Delta FAW \text{ (AAS).}$$

2. 證明四邊形$HPFG$是正方形且面積為b^2：

因為 $\overline{HA}=\overline{AB}$, $\angle HAG=180^\circ-90^\circ-x^\circ=y^\circ=\angle CBA$, $\overline{AG}=\overline{BC}$ ，所以

$$\Delta HAG\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等}),$$

即 $\angle HGA=\angle ACB=90^\circ$, $\angle GHA=\angle CAB=x^\circ$, $\overline{GH}=\overline{CA}=b$ 。在四邊形 $HPFG$ 中，

因為 $\angle GHA+\angle AHP=x^\circ+\angle AHP=\angle NHO+\angle AHP=90^\circ$, $\angle PFG=\angle FGH=90^\circ$ ，所以

$$\text{四邊形}HPFG\text{的四個內角都是直角，}$$

又 $\overline{FG}=\overline{FA}+\overline{AG}=(\overline{CA}-\overline{CF})+\overline{AG}=b-a+a=b$, $\overline{GH}=\overline{CA}=b$ ，故

$$\text{四邊形}HPFG\text{是面積為}b^2\text{的正方形。}$$

3. 證明四邊形 $PNOQ$ 面積加上三角形 WYP 面積等於三角形 AGH 面積：

因為四邊形 $HPFG$ 是正方形，所以 $\overline{PH}=b=\overline{CA}$ ，又因為 $\angle PHQ=x^\circ=\angle CAY$,

$\angle PQH=90^\circ=\angle CYA$ ，所以 $\Delta PHQ\cong\Delta CAY$ (AAS)，可推得

$$\Delta PHQ\text{面積}=\Delta CAY\text{面積。}$$

因為 ΔNHO 面積 $=\Delta FAW$ 面積且 ΔPHQ 面積 $=\Delta CAY$ 面積，所以

$$\text{四邊形}PNOQ\text{面積}=\text{四邊形}CFWY\text{面積。}$$

因為 $\angle PCF=y^\circ=\angle HAG$, $\overline{CF}=a=\overline{AG}$, $\angle CFP=90^o=\angle AGH$ ，所以

$\Delta CFP\cong\Delta AGH$ (ASA)，可推得

$$\Delta CFP\text{面積}=\Delta AGH\text{面積。}$$

故

$$\begin{aligned}\text{四邊形}PNOQ\text{面積}+\Delta WYP\text{面積}&=\text{四邊形}CFWY\text{面積}+\Delta WYP\text{面積}\\&=\Delta CFP\text{面積}\\&=\Delta AGH\text{面積。}\end{aligned}$$

4. 證明 $F-P-K$ 共線：

因為 $\overline{PH}=b=\overline{CA}$, $\angle PHK=x^o=\angle CAB$, $\overline{HK}=c=\overline{AB}$ ，所以

$$\Delta HKP\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等}),$$

即 $\angle HPK=\angle ACB=90^o$ ，故

$$F-P-K\text{共線。}$$

5. 證明$E-P-H$共線：

因為$\overline{FK}\,//\,\overline{CD}$且$\angle PED=90^\circ$，所以$\angle EPK=90^\circ$，故

$$E-P-H\text{共線。}$$

6. 證明四邊形$PKDE$是正方形且面積為a^2：

因為$\overline{BK}=c=\overline{AB}$, $\angle DBK=x^\circ=\angle CAB$, $\overline{BD}=b=\overline{AC}$，所以

$$\Delta BKD\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

即$\angle BDK=\angle ACB=90^\circ$, $\overline{KD}=\overline{BC}=a$。因為$\angle EDK=90^\circ=\angle EPK=\angle PED$,

$\overline{KD}=a=\overline{PK}$，所以

$$\text{四邊形}PKDE\text{是面積為}a^2\text{的正方形。}$$

7. 證明三角形BEX和三角形PSR皆全等於三角形UDV：

因為$\overline{UV}\,//\,\overline{BK}$，所以$\angle XBE=\angle VUD$，又$\angle BEX=90^\circ=\angle UDV$, $\overline{EB}=\overline{DU}$，可推得

$$\Delta BEX\cong\Delta UDV\ (\text{ASA 全等}).$$

因為$\overline{PR}\,//\,\overline{UV}$, $\overline{PS}\,//\,\overline{UD}$，且$\angle RPS$與$\angle VUD$皆為銳角，所以$\angle RPS=\angle VUD$，又

$\angle PSR=90^\circ=\angle UDV$, $\overline{PR}=\overline{UV}$，可推得

$$\Delta PSR\cong\Delta UDV\ (\text{AAS 全等}).$$

故

$$\Delta BEX\cong\Delta PRS\cong\Delta UDV.$$

8. 證明三角形PQK全等於三角形BTU，進而推得四邊形$SRQK$全等於四邊形$EXTU$：

因為$\Delta PSR\cong\Delta BEX$，所以$\angle RPS=\angle XBE$，即$\angle QPK=\angle TBU$，又

$\angle PQK=90^\circ=\angle BTU$, $\overline{PK}=\overline{ED}=\overline{EU}+\overline{UD}=\overline{EU}+\overline{BE}=\overline{BU}$，可推得

$$\Delta PQK\cong\Delta BTU\ (\text{AAS 全等}).$$

因為$\Delta PQK\cong\Delta BTU$且$\Delta PSR\cong\Delta BEX$，所以

$$\text{四邊形}SRQK\cong\text{四邊形}EXTU.$$

9. 證明四邊形$BYPX$全等於四邊形$UTKV$：

因為$\Delta BEX\cong\Delta UDV$，所以$\angle BXE=\angle UVD$，可推得

$\angle BXP=180^\circ-\angle BXE=180^\circ-\angle UVD=\angle UVK$，又$\angle YBX=90^\circ=\angle TUV$,

$\angle BYP = 90^{\circ} = \angle UTK$ ，因此

四邊形 $BYPX$ 與四邊形 $UTKV$ 的四個內角皆對應相等。

因為 $\Delta BEX \cong \Delta UDV$ ，所以 $\overline{EX} = \overline{DV}$ ，可推得 $\overline{PX} = \overline{PE} - \overline{EX} = \overline{KD} - \overline{DV} = \overline{KV}$ ，又

因為 $\Delta BEX \cong \Delta UDV$ ，所以 $\overline{BX} = \overline{UV}$ ，故

$$四邊形 BYPX \cong 四邊形 UTKV.$$

10. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
正方形ABKH面積 &= 長方形AYQH面積 + 長方形BKQY面積 \\
&= (\Delta NHO面積 + 四邊形PNOQ面積 + \Delta WYP面積 + 四邊形AWPH面積) \\
&\quad + (\Delta PSR面積 + 四邊形SRQK面積 + \Delta XPK面積 + 四邊形BYPX面積) \\
&= \Delta FAW面積 + (四邊形PNOQ面積 + \Delta WYP面積) + 四邊形AWPH面積 \\
&\quad + (\Delta UDV面積 + 四邊形EXTU面積 + \Delta XPK面積 + 四邊形UTKD面積) \\
&= (\Delta FAW面積 + \Delta AGH面積 + 四邊形AWPH面積) \\
&\quad + (\Delta UDV面積 + 四邊形EXTU面積 + \Delta XPK面積 + 四邊形UTKD面積) \\
&= 正方形HPFG面積 + 正方形PKDE面積 \\
&= 正方形ACF'G'面積 + 正方形CBD'E'面積。
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 43). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明畫的輔助圖比較複雜，主要是將正方形 $ABKH$ 切割成若干區塊，先證明正方形 $ABKH$ 面積等於正方形 $HPFG$ 面積加上正方形 $PKDE$ 面積，再推得正方形 $ABKH$ 面積等於正方形 $ACF'G'$ 面積加上正方形 $CBD'E'$ 面積，最後推導出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：