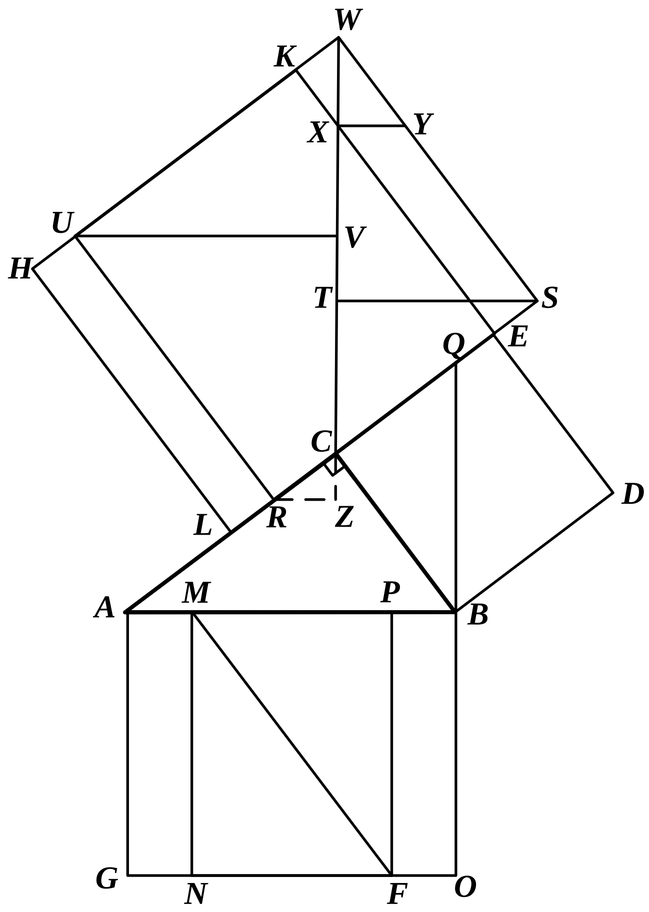
勾股定理證明-G193

【作輔助圖】

1. 以$\overline{BC}$為邊長向內作正方形$CBDE$.
2. $\overline{AB}$上取一點P使得$\overline{AP}=\overline{AC}$，作正方形$APFG$.
3. $\overline{AB}$上取一點M使得$\overline{MB}=\overline{AC}$，作正方形$BMNO$，連$\overline{MF}$.
4. $\overline{AC}$上取一點L使得$\overline{EL}=\overline{AB}$，作正方形$ELHK$.
5. 過C點作垂直$\overline{AB}$的直線，與直線HK交於W點，連$\overline{WK}$.
6. $\overline{HK}$上取一點U使得$\overline{UW}=\overline{AB}$.
7. 過U點作垂直$\overline{AC}$的直線，交$\overline{AC}$於R點。
8. 過W點作垂直直線RE的直線，交直線RE於S點，連$\overline{WS}$, $\overline{SE}$.
9. 過S點作垂直$\overline{WC}$的直線，交$\overline{WC}$於T點。
10. 過U點作垂直$\overline{WC}$的直線，交$\overline{WC}$於V點。
11. $\overline{WC}$上取一點X使得$\overline{TX}=\overline{BC}$.
12. 過X點作垂直$\overline{WC}$的直線，交$\overline{WS}$於Y點。
13. 直線BO與$\overline{CE}$交於Q點，連$\overline{BQ}$.
14. 過R點作垂直直線WC的直線，交直線WC於Z點，連$\overline{RZ}$, $\overline{ZC}$.



【求證過程】

證明四邊形$UWSR$為面積為c^2的正方形，再證明正方形$UWSR$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$BMNO$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形$UWSR$是正方形且面積為c^2：

四邊形$UWSR$中，因為$\angle WUR=\angle URS=\angle RSW=90^\circ$，所以

四邊形$UWSR$四個內角都是直角，

又$\overline{UW}=\overline{AB}=c$, $\overline{UR}=\overline{HL}=\overline{AB}=c$，因此

四邊形$UWSR$是面積為c^2的正方形。

2. 證明三角形WST全等於三角形ABC進而推得$\overline{TS}=\overline{CB}$：

設$\angle CAB=x^\circ$, $\angle CBA=y^\circ$，且已知$x^\circ+y^\circ=90^\circ$。因為

$\angle TCS+\angle ZCB=90^{\circ}=\angle CBA+\angle ZCB$，所以$\angle TCS=\angle CBA=y^{\circ}$，又

$\angle WST+\angle TSC=90^{\circ}=\angle TCS+\angle TSC$，可推得$\angle WST=\angle TCS=y^{\circ}$。因為

$\angle WST=y^{\circ}=\angle CBA,\ \angle WTS=90^{\circ}=\angle ACB,\ \overline{WS}=c=\overline{AB}$，所以

$$\Delta WST\cong\Delta ABC\,(\text{AAS}).$$

故

$$\overline{TS}=\overline{CB}.$$

3. 利用 2.證明三角形STC全等於三角形BCQ：

因為$\angle CQB+\angle QBC=90^{\circ}=\angle CBA+\angle QBC$，所以$\angle CQB=\angle CBA=y^{\circ}$。因為

$\angle TCS=y^{\circ}=\angle CQB,\ \overline{TS}=\overline{CB},\ \angle STC=90^{\circ}=\angle QCB$，所以

$$\Delta STC\cong\Delta BCQ\,(\text{AAS 全等}).$$

4. 證明四邊形$XYST$全等於四邊形$EQBD$：

四邊形$XYST$與四邊形$EQBD$中，因為$\angle YXT=90^{\circ}=\angle QED,\ \angle XTS=90^{\circ}=\angle EDB,$

$\angle YST=y^{\circ}=\angle QBD$，所以

$$\text{四邊形}XYST\text{與四邊形}EQBD\text{的四個內角都相等，}$$

又$\overline{TX}=\overline{BC}=\overline{DE},\ \overline{TS}=\overline{CB}=\overline{DB}$，故

$$\text{四邊形}XYST\cong\text{四邊形}EQBD.$$

5. 證明三角形UWV全等於三角形MFN：

因為$\Delta WST\cong\Delta ABC$，所以$\angle SWT=\angle CAB=x^{\circ}$，可推得

$\angle UWV=90^{\circ}-x^{\circ}=y^{\circ}=\angle CBA$。因為$\angle UWV=\angle CBA,\ \angle WVU=90^{\circ}=\angle ACB,$

$\overline{UW}=\overline{AB}$，所以

$$\Delta UWV\cong\Delta ABC\,(\text{AAS 全等}).$$

因為$\angle PMF=\angle CBA=y^{\circ}$，所以$\angle FMN=90^{\circ}-y^{\circ}=x^{\circ}=\angle CAB$，又

$\angle MNF=90^{\circ}=\angle ACB,\ \overline{MN}=\overline{AG}=\overline{AC}$，可推得

$$\Delta MFN\cong\Delta ABC\,(\text{ASA 全等}).$$

故

$$\Delta UWV \cong \Delta MFN.$$

6. 證明四邊形 $UVZR$ 全等於四邊形 $MBOF$ ：

   四邊形 $UVZR$ 與四邊形 $MBOF$ 中，因為 $\angle UVZ = 90^\circ = \angle MBO$, $\angle VZR = 90^\circ = \angle BOF$,

   $\angle VUR = 90^\circ - \angle WUV = y^\circ = \angle BMF$ ，所以

   四邊形 $UVZR$ 與四邊形 $MBOF$ 的四個內角都相等，

   又 $\overline{UV} = \overline{BC} = \overline{MB}$, $\overline{UR} = \overline{AB} = \overline{MF}$ ，故

   $$\text{四邊形}UVZR \cong \text{四邊形}MBOF.$$

7. 證明三角形 YWX 全等於三角形 CRZ ：

   因為 $\Delta WST \cong \Delta ABC$ ，所以 $\angle YWX = \angle CAB = x^\circ$ ，又因為四邊形 $UVZR \cong$ 四邊形

   $MBOF$ ，所以 $\overline{RZ} = \overline{FO} = b - a$ 。因為 $\overline{WX} = \overline{WT} - \overline{XT} = \overline{AC} - \overline{BC} = b - a = \overline{RZ}$,

   $\angle YWX = x^\circ = \angle CRZ$, $\angle YXW = 90^\circ = \angle CZR$ ，所以

   $$\Delta YWX \cong \Delta CRZ \text{ (ASA 全等)}.$$

8. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}UWSR\text{面積} &= \Delta STC\text{面積} + \text{四邊形}XYST\text{面積} + \Delta YWX\text{面積} \\
&\quad + \Delta UWV\text{面積} + \text{四邊形}UVCR\text{面積} \\
&= \Delta BCQ\text{面積} + \text{四邊形}EQBD\text{面積} + \Delta CRZ\text{面積} \\
&\quad + \Delta MFN\text{面積} + \text{四邊形}UVCR\text{面積} \\
&= (\Delta BCQ\text{面積} + \text{四邊形}EQBD\text{面積}) \\
&\quad + (\Delta CRZ\text{面積} + \text{四邊形}UVCR\text{面積}) + \Delta MFN\text{面積} \\
&= (\Delta BCQ\text{面積} + \text{四邊形}EQBD\text{面積}) \\
&\quad + \text{四邊形}UVZR\text{面積} + \Delta MFN\text{面積} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積} + \text{四邊形}MBOF\text{面積} + \Delta MFN\text{面積} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積} + \text{正方形}BMNO\text{面積}，
\end{aligned}$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 18 日想到的。
2. 心得：此證明畫的輔助圖比較複雜，證明過程也比較繁瑣，主要在證明正方

形*UWSR*的面積等於正方形*CBDE*的面積加上正方形*BMNO*的面積。必須有耐心地一一證明圖形的全等關係，才能推導出三個正方形的面積關係，進而得到勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：