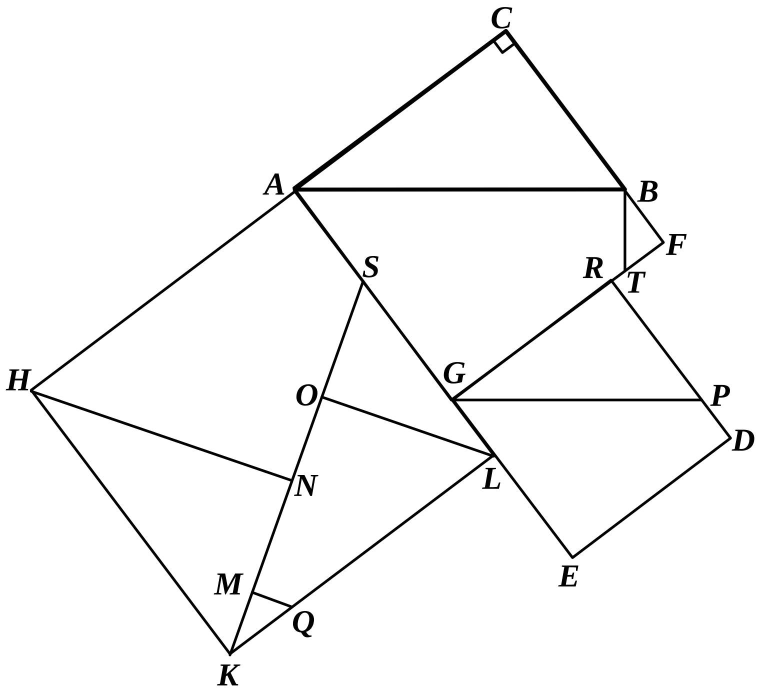
勾股定理證明-G192

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$ACFG$.
2. 延長$\overline{CA}$至H點使得$\overline{AH}=\overline{AB}$，作正方形$AHKL$.
3. 延長$\overline{GL}$至E點使得$\overline{GE}=\overline{CB}$，作正方形$GEDR$.
4. 過G點作平行$\overline{AB}$的直線，交$\overline{RD}$於P點。
5. $\overline{AL}$上取一點S點使得$\overline{LS}=\overline{GP}$，連$\overline{SK}$.
6. 過H點作垂直$\overline{SK}$的直線，交$\overline{SK}$於N點。
7. 過L點作垂直$\overline{SK}$的直線，交$\overline{SK}$於O點。
8. 過B點作垂直$\overline{AB}$的直線，交$\overline{FG}$於T點。
9. $\overline{KL}$上取一點Q使得$\overline{QK}=\overline{BT}$，過$Q$點作垂直$\overline{SK}$的直線，交$\overline{SK}$於$M$點。



【求證過程】

證明正方形 $AHKL$ 面積等於正方形 $GEDR$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 LSO 與三角形 GPR 全等：

   設 $\angle CAB = x^\circ$, $\angle CBA = y^\circ$，且已知 $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$。因為 $\overline{RG}//\overline{CA}$, $\overline{GP}//\overline{AB}$，所以

   $\angle RGP = \angle CAB = x^\circ$。因為 $\angle OLS = x^\circ = \angle RGP$, $\angle LOS = 90^\circ = \angle GRP$, $\overline{LS} = \overline{GP}$，

   所以

$$\Delta LSO \cong \Delta GPR \, (\text{AAS}).$$

2. 證明三角形 KLO 與三角形 ABC 全等：

   因為 $\Delta LSO \cong \Delta GPR$，所以 $\overline{LO} = \overline{GR} = a = \overline{BC}$，又因為 $\angle KOL = 90^\circ = \angle ACB$,

   $\overline{KL} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta KLO \cong \Delta ABC \, (\text{RHS 全等}).$$

3. 證明三角形 KQM 與三角形 BTF 全等：

   因為 $\Delta KLO \cong \Delta ABC$，所以 $\angle OKL = \angle CAB = x^\circ$，又因為 ΔBTF 中，

$\angle FBT = 90^\circ - \angle CBA = x^\circ$，所以 $\angle MKQ = \angle OKL = x^\circ = \angle FBT$。因為 $\angle MKQ = \angle FBT$,

$\angle KMQ = 90^\circ = \angle BFT$, $\overline{QK} = \overline{BT}$，所以

$$\Delta KQM \cong \Delta BTF \text{ (AAS).}$$

4. 證明四邊形 $QMOL$ 與四邊形 $PDEG$ 全等：

因為 $\Delta KLO \cong \Delta ABC$，所以 $\angle KLO = \angle ABC = y^\circ$，又因為

$\angle EGP = 90^\circ - \angle RGP = 90^\circ - x^\circ = y^\circ$，所以 $\angle KLO = y^\circ = \angle PGE$。因為

$\angle QLO = \angle KLO = y^\circ = \angle PGE$, $\angle QMO = 90^\circ = \angle PDE$, $\angle MOL = 90^\circ = \angle DEG$，所以

$$\text{四邊形}QMOL\text{與四邊形}PDEG\text{的四個內角都對應相等。}$$

因為 $\Delta KLO \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{OK} = \overline{CA} = b$，又因為 $\Delta KQM \cong \Delta BTF$，所以 $\overline{KM} = \overline{BF}$，可推得

$$\overline{MO} = \overline{KO} - \overline{KM} = b - \overline{BF} = \overline{CF} - \overline{BF} = \overline{CB} = a = \overline{DE}\ ,$$

因為 $\Delta KLO \cong \Delta ABC$，所以

$$\overline{OL} = \overline{CB} = a = \overline{EG}\ ,$$

故

$$\text{四邊形}QMOL\text{與四邊形}PDEG\text{全等。}$$

5. 證明三角形 HKN 與三角形 ABC 全等：

因為 $\angle NKH = 90^\circ - \angle OKL = 90^\circ - x^\circ = y^\circ = \angle CBA$, $\angle HNK = 90^\circ = \angle ACB$,

$\overline{HK} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta HKN \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

6. 證明四邊形 $ASNH$ 與四邊形 $BTGA$ 全等：

因為 $\Delta HKN \cong \Delta ABC$，所以 $\angle NHK = \angle CAB = x^\circ$，可推得

$\angle AHN = 90^\circ - \angle NHK = 90^\circ - x^\circ = 90^\circ - \angle CAB = \angle BAG$，又 $\angle HAS = 90^\circ = \angle ABT$,

$\angle SNH = 90^\circ = \angle TGA$，因此

$$\text{四邊形}ASNH\text{與四邊形}BTGA\text{的四個內角都對應相等。}$$

因為 $\Delta HKN \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{HN} = \overline{AC} = b$，可推得 $\overline{HN} = b = \overline{AG}$，又 $\overline{HA} = c = \overline{AB}$，

故

$$\text{四邊形}ASNH\text{與四邊形}BTGA\text{全等。}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}AHKL\text{面積} &= \Delta LSO\text{面積}+\Delta KQM\text{面積}+\text{四邊形}QMOL\text{面積}\\
&\quad +\Delta HKN\text{面積}+\text{四邊形}ASNH\text{面積}\\
&= \Delta GPR\text{面積}+\Delta BTF\text{面積}+\text{四邊形}PDEG\text{面積}\\
&\quad +\Delta ABC\text{面積}+\text{四邊形}BTGA\text{面積}\\
&= (\Delta GPR\text{面積}+\text{四邊形}PDEG\text{面積})\\
&\quad +(\Delta BTF\text{面積}+\Delta ABC\text{面積}+\text{四邊形}BTGA\text{面積})\\
&= \text{正方形}GEDR\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積，}
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他想到的。
2. 心得：此證明滿直觀的，就是證明正方形 $AHKL$ 切割出來的所有區塊的面積等於正方形 $GEDR$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，就能推導出勾股定理的關係式，證明過程必須一步一步地證明圖形的全等關係，才能得到三個正方形的面積關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：

(1) 此證明在魯米斯的書中所提的作圖是錯誤的，書上說 S 點要滿足 $\overline{LS}=\overline{AC}$ 是錯誤的，S 點要滿足 $\overline{LS}=\overline{GP}$ 才是正確的。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：