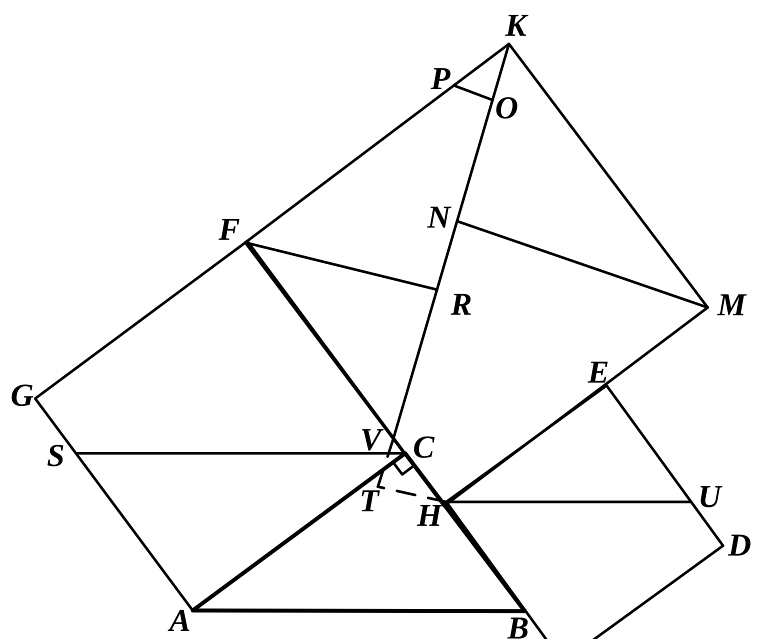
勾股定理證明-G191

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACFG$.
2. $\overline{CB}$上取一點H點使得$\overline{FH}=\overline{AB}$，作正方形$FHMK$.
3. 延長$\overline{HB}$至L點使得$\overline{HL}=\overline{CB}$，作正方形$HLDE$.
4. 過C點作平行$\overline{AB}$的直線，交$\overline{GA}$於S點。
5. 過H點作平行$\overline{AB}$的直線，交$\overline{ED}$於U點。
6. $\overline{FC}$上取一點V使得$\overline{FV}=\overline{HU}$，連$\overline{VK}$.
7. 過F點作垂直$\overline{KV}$的直線，交$\overline{KV}$於R點。
8. 過M點作垂直$\overline{KV}$的直線，交$\overline{KV}$於N點。
9. 在直線KV的直線取一點T，使得$\angle VHT=\angle CAB$.
10. $\overline{FK}$上取一點P使得$\overline{PK}=\overline{VH}$，過$P$點作垂直$\overline{KV}$的直線，交$\overline{KV}$於$O$點。



【求證過程】

證明正方形 $FHMK$ 面積等於正方形 $HLDE$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 FVR 與三角形 HUE 全等：

設 $\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知 $x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$。因為 $\angle VHT = \angle CAB = x^{\circ}$，所以

$\angle HVT = y^{\circ}$。因為 $\angle FVR = \angle HVT = y^{\circ}$, $\angle HUE = \angle CBA = y^{\circ}$，所以

$$\angle FVR = \angle HUE.$$

又 $\angle FRV = 90^{\circ} = \angle HEU$, $\overline{FV} = \overline{HU}$，故

$$\Delta FVR \cong \Delta HUE \text{ (AAS).}$$

2. 證明三角形 KPO 與三角形 HVT 全等：

因為 $\angle PKO = 90^{\circ} - \angle FVR = 90^{\circ} - y^{\circ} = x^{\circ} = \angle THV$,

$\angle OPK = 90^{\circ} - \angle PKO = 90^{\circ} - x^{\circ} = y^{\circ} = \angle TVH$, $\overline{PK} = \overline{VH}$，所以

$$\Delta KPO \cong \Delta HVT \text{ (ASA 全等).}$$

3. 證明三角形 MKN 與三角形 CSA 全等：

因為 $\angle NKM = 90^{\circ} - \angle PKO = 90^{\circ} - x^{\circ} = y^{\circ} = \angle CBA$, $\angle MNK = 90^{\circ} = \angle ACB$,

$\overline{MK} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta MKN \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因為 $\overline{SC} // \overline{AB}$，所以 $\angle ACS = \angle CAB$，又 $\angle CAS = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{CA} = \overline{AC}$，可推得

$$\Delta CSA \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等).}$$

故

$$\Delta MKN \cong \Delta CSA.$$

4. 證明四邊形 $HTNM$ 與四邊形 $SGFC$ 全等：

因為 $\Delta KPO \cong \Delta HVT$，所以 $\angle HTV = \angle KOP = 90^{\circ}$。因為 $\angle HTV = 90^{\circ} = \angle SGF$,

$\angle MNT = 90^{\circ} = \angle CFG$, $\angle MHT = 90^{\circ} + x^{\circ} = 90^{\circ} + (90^{\circ} - y^{\circ}) = 180^{\circ} - y^{\circ} = \angle CSG$，所以

四邊形 $HTNM$ 與四邊形 $SGFC$ 的四個內角都對應相等。

因為 $\Delta MKN \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{MN} = \overline{AC} = b = \overline{CF}$ 。因為 $\Delta CSA \cong \Delta ABC$ ，所以

$\overline{CS} = \overline{AB} = c$ ，可推得 $\overline{MH} = c = \overline{CS}$ 。故

$$\text{四邊形}HTNM\text{與四邊形}SGFC\text{全等。}$$

5. 證明四邊形 $PORF$ 與四邊形 $UDLH$ 全等：

因為 $\angle FPR = 180^\circ - \angle OPK = 180^\circ - y^\circ = 180^\circ - \angle HUE = \angle HUD,$

$\angle POR = 90^\circ = \angle UDL,\ \angle ORF = 90^\circ = \angle DLH$ ，所以

$$\text{四邊形}PORF\text{與四邊形}UDLH\text{的四個內角都對應相等。}$$

因為 $\Delta FVR \cong \Delta HUE$ ，所以 $\overline{FR} = \overline{HE} = a = \overline{HL}$ ，又

$\overline{FP} = \overline{FK} - \overline{PK} = \overline{FH} - \overline{VH} = \overline{FV} = \overline{HU}$ ，故

$$\text{四邊形}PORF\text{與四邊形}UDLH\text{全等。}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}FHMK\text{面積} &= \Delta FVR\text{面積} + \Delta KPO\text{面積} + \text{四邊形}HVNM\text{面積} \\
&\quad + \Delta MKN\text{面積} + \text{四邊形}PORF\text{面積} \\
&= \Delta HUE\text{面積} + \Delta HVT\text{面積} + \text{四邊形}HVNM\text{面積} \\
&\quad + \Delta CSA\text{面積} + \text{四邊形}UDLH\text{面積} \\
&= \Delta HUE\text{面積} + \text{四邊形}HTNM\text{面積} \\
&\quad + \Delta CSA\text{面積} + \text{四邊形}UDLH\text{面積} \\
&= \Delta HUE\text{面積} + \text{四邊形}SGFC\text{面積} \\
&\quad + \Delta CSA\text{面積} + \text{四邊形}UDLH\text{面積} \\
&= (\Delta HUE\text{面積} + \text{四邊形}UDLH\text{面積}) \\
&\quad + (\Delta CSA\text{面積} + \text{四邊形}SGFC\text{面積}) \\
&= \text{正方形}HLDE\text{面積} + \text{正方形}ACFG\text{面積，}
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 18 日想到的。
2. 心得：此證明使用的是切割法，必須證明正方形 $FHMK$ 所切割成的所有區塊的面

積，恰好等於正方形 $HLDE$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，最後就能推導出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●	●	●	●

4. 補充：

(1) 此證明在魯米斯的書中所提的作圖是錯誤的，書上是連線段 $\overline{CK}$，而不是連線段 $\overline{VK}$，事實上是錯誤的，必須在 $\overline{FC}$ 上取一點 V 使得 $\overline{FV}=\overline{HU}$，接下來連 $\overline{VK}$ 才是正確的分割。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：