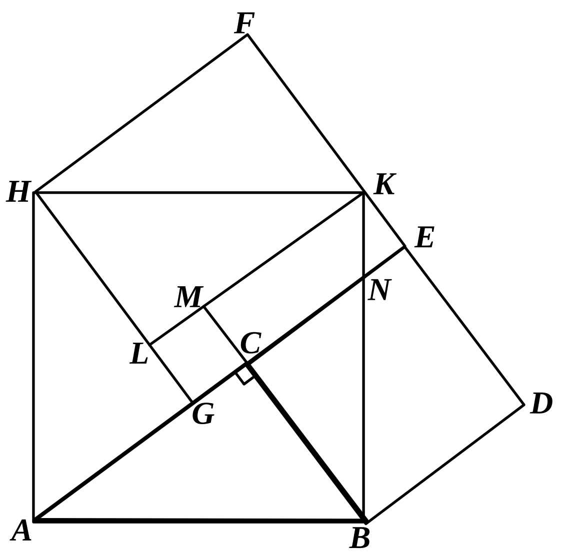
勾股定理證明-G185

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{BC}$ 為邊長向外作正方形 $CBDE$，再以 $\overline{AB}$ 為邊長向內作正方形 $ABKH$，$\overline{BK}$ 交 $\overline{CE}$ 於 N 點。
2. 過 H 點作垂直 $\overline{AC}$ 的直線，交 $\overline{AC}$ 於 G 點。
3. 過 K 點作垂直 $\overline{HG}$ 的直線，交 $\overline{HG}$ 於 L 點。
4. 直線 BC 與直線 LK 交於 M 點。
5. 連 $\overline{EK}$.
6. 延長 $\overline{EK}$ 至 F 點，使得 $\overline{KF}=\overline{BC}=a$.
7. 連 $\overline{HF}$.



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的 $\overline{CB}$ 為邊長向外作正方形 $CBDE$，以 $\overline{AB}$ 為邊長向內作正方形 $ABKH$，證明正方形 $ABKH$ 所切割出的所有區塊面積總和等於正方形 $CBDE$ 的面積加上正方形 $HGEF$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明 $D-E-K$ 共線以及三角形 ABC 等於四邊形 $NEDB$ 面積加上三角形 KNE 面積：

   設 $\angle CAB=x^\circ,\ \angle CBA=y^\circ$，且已知 $x^\circ+y^\circ=90^\circ$。因為

$\angle KBD + \angle KBC = 90^{\circ} = \angle CBA + \angle KBC$，所以 $\angle KBD = \angle CBA = y^{\circ}$，又 $\overline{BD} = a = \overline{BC}$,

$\overline{KB} = c = \overline{AB}$，可推得 $\Delta KBD \cong \Delta ABC$ (SAS 全等)，即 $\angle BDK = \angle BCA = 90^{\circ}$，又已知

$\angle BDE = 90^{\circ}$，故

$$D - E - K \text{共線。}$$

且

$$\Delta ABC\text{面積} = \text{四邊形}NEDB\text{面積} + \Delta KNE\text{面積。}$$

2. 證明三角形 HAG 全等於三角形 HKF ：

因為 $\Delta KBD \cong \Delta ABC$，所以 $\angle DKB = \angle CAB = x^{\circ}$，即 $\angle HKF = 90^{\circ} - x^{\circ} = y^{\circ}$，又因為

$\overline{KF} = a = \overline{BC}$, $\overline{HK} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta HKF \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等).}$$

因為 $\angle HAG + \angle CAB = 90^{\circ}$，所以 $\angle HAG = 90^{\circ} - \angle CAB = 90^{\circ} - x^{\circ} = y^{\circ}$，又因為

$\angle HGA = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{HA} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta HAG \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

故

$$\Delta HAG \cong \Delta HKF.$$

3. 證明四邊形 $HGEF$ 是正方形且面積為 b^2 ：

因為 $\Delta HKF \cong \Delta ABC$，所以 $\angle HFK = \angle ACB = 90^{\circ}$, $\overline{HF} = \overline{AC} = b$，又因為

$\Delta HAG \cong \Delta ABC$，所以 $\angle FHK = \angle CAB = x^{\circ}$, $\overline{HG} = \overline{AC} = b$。因為

$\angle GHA + \angle KHL = 90^{\circ}$，所以 $x^{\circ} + \angle KHL = 90^{\circ}$，可推得 $\angle FHK + \angle KHL = 90^{\circ}$，即

$\angle FHG = 90^{\circ}$。因此

$$\text{四邊形}HGEF\text{的四個內角都是直角，}$$

又 $\overline{HF} = b = \overline{HG}$，故

$$\text{四邊形}HGEF\text{是面積為}b^2\text{的正方形。}$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{四邊形}HGNK\text{面積} + \Delta NCB\text{面積} + \Delta HAG\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} \\
&= \text{四邊形}HGNK\text{面積} + \Delta NCB\text{面積} + \Delta HKF\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}NEDB\text{面積} + \Delta KNE\text{面積} \\
&= (\Delta NCB\text{面積} + \text{四邊形}NEDB\text{面積}) \\
&\quad + (\text{四邊形}HGNK\text{面積} + \Delta HKF\text{面積} + \Delta KNE\text{面積}) \\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積} + \text{正方形}HGEF\text{面積}，
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊
   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 383
2. 心得：此證明最主要只要證明正方形 $ABKH$ 中的 $\Delta ABC \cong \Delta KBD$ 以及 $\Delta HAG \cong \Delta HKF$ ，就能得到三個正方形的面積關係，進而推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：