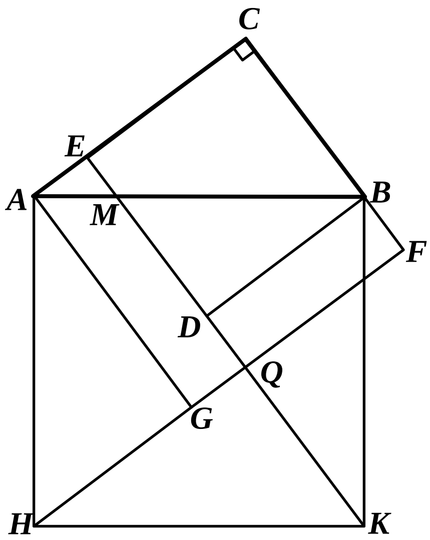
勾股定理證明-G184

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$, $\overline{AC}$為邊長向內作正方形$CBDE$和正方形$ACFG$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.
2. 連$\overline{DK}$交$\overline{FG}$於Q點。
3. 連$\overline{GH}$.



【求證過程】

分別以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形KBD全等於三角形ABC進而推得$E-D-K$共線：

   設$\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知$x^{\circ}+y^{\circ}=90^{\circ}$。因為

   $\angle KBD+\angle ABD=90^{\circ}=\angle CBA+\angle ABD$，所以$\angle KBD=\angle CBA=y^{\circ}$，又$\overline{BD}=a=\overline{BC}$,

   $\overline{KB}=c=\overline{AB}$，可推得

   $$\Delta KBD \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)，}$$

   即$\angle BKD=\angle BAC=x^{\circ}$, $\angle BDK=\angle BCA=90^{\circ}$，故

   $$E-D-K\text{共線。}$$

2. 證明三角形AHG全等於三角形ABC進而推得$F-G-H$共線：

因為 $\angle HAG + \angle GAB = 90^\circ = \angle HAG + \angle BAC$，所以 $\angle HAG = \angle CAB$，又 $\overline{AG} = \overline{AC} = b$,

$\overline{AH} = \overline{AB} = c$，可推得

$$\Delta AHG \cong \Delta ABC \text{(SAS 全等)},$$

即 $\angle AGH = \angle ACB = 90^\circ$，故

$$F - G - H \text{共線。}$$

3. 證明三角形 HKQ 全等於三角形 ABC：

   因為 $\Delta AHG \cong \Delta ABC$，所以 $\angle AHG = \angle ABC = y^\circ$，可推得 $\angle QHK = x^\circ$，又因為

   $\angle HQK = 90^\circ$, $\overline{HK} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta HKQ \cong \Delta ABC \text{(AAS 全等)}.$$

4. 證明長方形 $ECFQ$ 面積等於三角形 ABC 面積兩倍：

$$\begin{aligned} \text{長方形}ECFQ\text{面積} &= a \times b \\ &= 2\Delta ABC\text{面積。} \end{aligned}$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned} \text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta MBD\text{面積} + \Delta KBD\text{面積} + \text{梯形}AGQM\text{面積} \\ &\quad + \Delta AHG\text{面積} + \Delta HKQ\text{面積} \\ &= \Delta MBD\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} + \text{梯形}AGQM\text{面積} \\ &\quad + \Delta ABC\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} \\ &= \Delta MBD\text{面積} + (\text{梯形}EMBC\text{面積} + \Delta AME\text{面積}) \\ &\quad + \text{梯形}AGQM\text{面積} + 2\Delta ABC\text{面積} \\ &= (\Delta MBD\text{面積} + \text{梯形}EMBC\text{面積}) \\ &\quad + \Delta AME\text{面積} + \text{梯形}AGQM\text{面積} + \text{長方形}ECFQ\text{面積} \\ &= \text{正方形}CBDE\text{面積} + \text{正方形}ACFG\text{面積。} \end{aligned}$$

   得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是 Richard A. Bell 在 1920 年 11 月 30 日想到的，並在 1938 年 2 月 28 日交給他的。
2. 心得：此證明一開始必須先證明 $E - D - K$ 共線以及 $F - G - H$ 共線，對國中學生可能不易理解。整個證明必須將正方形 $ABKH$ 所切割出的所有區塊面積，利

用全等關係以及面積相等的關係，證明等於正方形 *CBDE* 的面積加上正方形 *ACFG* 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：