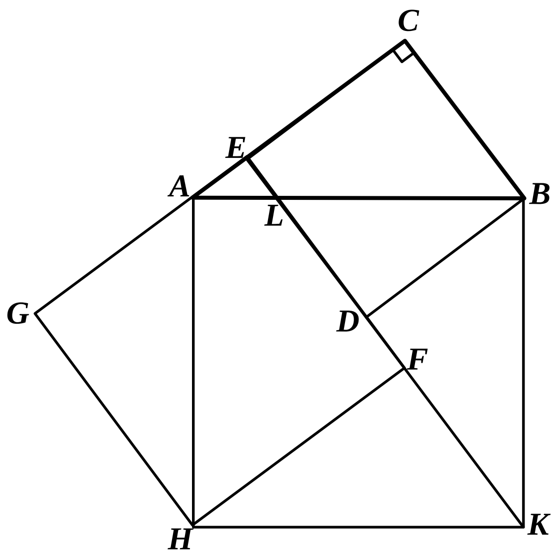
勾股定理證明-G183

【作輔助圖】

1. 以$\overline{CB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.
2. 連$\overline{DK}$.
3. 過H點作垂直$\overline{DK}$的直線，交$\overline{DK}$於F點。
4. 延長$\overline{CA}$至G點使得$\overline{AG}=\overline{BC}=a$，連$\overline{GH}$.



【求證過程】

以直角三角形ABC的$\overline{CB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$EGHF$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形KBD全等於三角形ABC進而推得$E-D-K$共線：

   設$\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知$x^{\circ}+y^{\circ}=90^{\circ}$。因為

   $\angle KBD+\angle ABD=90^{\circ}=\angle CBA+\angle ABD$，所以$\angle KBD=\angle CBA$，又$\overline{BD}=a=\overline{BC}$,

   $\overline{KB}=c=\overline{AB}$，可推得

   $$\Delta KBD \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

   即$\angle BKD=\angle BAC=x^{\circ}$, $\angle BDK=\angle BCA=90^{\circ}$，故

$$E-D-K\text{共線。}$$

2. 證明三角形 HKF 全等於三角形 HAG：

   因為 $\angle HAG+\angle CAB=90^{\circ}$，所以 $\angle HAG=y^{\circ}=\angle CBA$，又 $\overline{AG}=a=\overline{BC}$,

   $\overline{HA}=c=\overline{AB}$，可推得

$$\Delta HAG\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等}),$$

   即 $\angle AGH=90^{\circ}$, $\overline{GH}=\overline{CA}=b$，又因為 $\angle BKD+\angle HKF=90^{\circ}$, $\angle BKD=x^{\circ}$，所以

   $\angle HKF=y^{\circ}=\angle ABC$，又 $\angle HFK=90^{\circ}=\angle ACB$, $\overline{HK}=c=\overline{AB}$，因此

$$\Delta HKF\cong\Delta ABC\,(\text{AAS 全等}),$$

   故

$$\Delta HKF\cong\Delta HAG.$$

3. 證明四邊形 $EGHF$ 是正方形且面積為 b^2：

   四邊形 $EGHF$ 中，因為 $\angle FEG=\angle EGH=\angle HFE=90^{\circ}$，所以

$$\text{四邊形}EGHF\text{的四個內角都是直角。}$$

   又因為 $\overline{EG}=\overline{EA}+\overline{AG}=(b-a)+a=b$, $\overline{GH}=b$，所以

$$\text{四邊形}EGHF\text{是面積為}b^2\text{的正方形。}$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積}&=\Delta BDL\text{面積}+\Delta KBD\text{面積}+\text{梯形}AHFL\text{面積}+\Delta HKF\text{面積}\\&=\Delta BDL\text{面積}+\Delta ABC\text{面積}+\text{梯形}AHFL\text{面積}+\Delta HAG\text{面積}\\&=\Delta BDL\text{面積}+(\text{梯形}LBCE\text{面積}+\Delta ALE\text{面積})\\&\quad+\text{梯形}AHFL\text{面積}+\Delta HAG\text{面積}\\&=(\Delta BDL\text{面積}+\text{梯形}LBCE\text{面積})+(\Delta ALE\text{面積}\\&\quad+\text{梯形}AHFL\text{面積}+\Delta HAG\text{面積})\\&=\text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}EGHF\text{面積，}\end{aligned}$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

   Jury. Wipper(1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen*

biogr. Mittheilgn uber Pythagoras (p.23). Leipz.: Friese.

Edwards, George C. (1895). *Elements of Geometry* (p.155). New York : Macmillan and co.

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly,6*(2), 33-34.

Row, T. S. (1905). *Geometric exercises in paper folding* (p.14). Chicago, IL:

Paquin Printers.

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 29). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明畫的輔助圖並不複雜，整個證明也滿直觀的，就是證明正方形 *ABKH* 所切割出的所有區塊面積總和等於正方形 *CBDE* 的面積加上正方形 *EGHF* 的面積，就能順利推導出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：

(1) 根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中，建議每個幾何老師都應該要使用這個證明教學。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：