勾股定理證明-G182

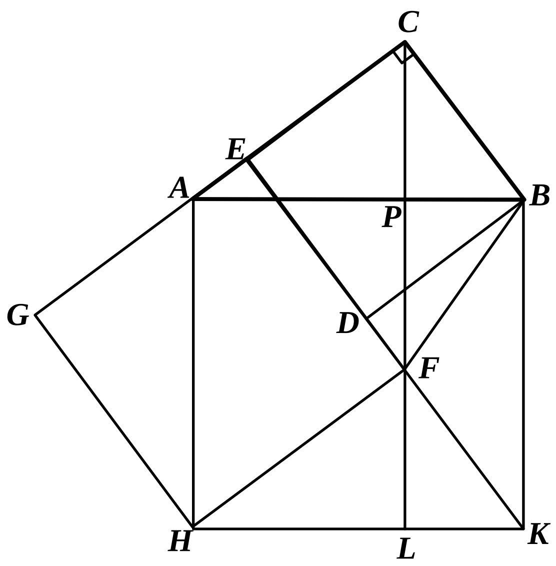
【作輔助圖】

1. 以$\overline{CB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

2. 過C點作垂直$\overline{AB}$的直線，分別交$\overline{AB}$，$\overline{HK}$於P點，L點。

3. 連$\overline{DK}$交$\overline{CL}$於F點，連$\overline{HF}$，$\overline{BF}$.

4. 延長$\overline{CA}$至G點使得$\overline{AG}=\overline{BC}=a$，連$\overline{GH}$.



【求證過程】

以直角三角形ABC的$\overline{CB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，正方形$ABKH$面積等於長方形$BKLP$的面積加上長方形$AHLP$的面積，證明它們之間的面積關係，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形KBD全等於三角形ABC進而推得$E-D-K$共線：

設$\angle CAB=x^\circ$，$\angle CBA=y^\circ$，且已知$x^\circ+y^\circ=90^\circ$。因為

$\angle KBD+\angle ABD=90^\circ=\angle CBA+\angle ABD$，所以$\angle KBD=\angle CBA$，又$\overline{BD}=a=\overline{BC}$,

$\overline{KB}=c=\overline{AB}$，可推得

$$\Delta KBD\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

即$\angle BDK=\angle BCA=90^\circ$，故

$$E-D-K\text{共線。}$$

2. 證明三角形 HAG 全等於三角形 ABC 進而推得 $\angle AGH=90^{\circ}$ 且 $\overline{GH}=\overline{CA}=b$ ：

因為 $\angle HAG+\angle CAB=90^{\circ}$，所以 $\angle HAG=y^{\circ}=\angle CBA$，又 $\overline{AG}=a=\overline{BC}$,

$\overline{HA}=c=\overline{AB}$，因此

$$\Delta HAG\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等}),$$

故

$$\angle AGH=90^{\circ}\text{且}\overline{GH}=\overline{CA}=b.$$

3. 證明三角形 FCE 全等於三角形 ABC 進而推得 $\overline{CF}=\overline{AB}=c$ ：

因為 $\angle FCE+\angle CAB=90^{\circ}$，所以 $\angle FCE=y^{\circ}=\angle CBA$，又 $\overline{CE}=a=\overline{BC}$,

$\angle CEF=90^{\circ}=\angle ACB$，因此

$$\Delta FCE\cong\Delta ABC\,(\text{ASA 全等}),$$

故

$$\overline{CF}=\overline{AB}=c.$$

4. 證明四邊形 $BKFC$ 與四邊形 $AHFC$ 皆為平行四邊形：

因為 $\overline{BK}\,//\,\overline{CF}$ 且 $\overline{BK}=\overline{CF}$, $\overline{AH}\,//\,\overline{CF}$, $\overline{AH}=\overline{CF}$ ，所以

$$\text{四邊形}BKFC\text{與四邊形}AHFC\text{皆為平行四邊形。}$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積}&=\text{矩形}BKLP\text{面積}+\text{矩形}AHLP\text{面積}\\&=\text{平行四邊形}BKFC\text{面積}+\text{平行四邊形}AHFC\text{面積}\\&=2\Delta BFK\text{面積}+\text{平行四邊形}AHFC\text{面積}\\&=2\times\frac{1}{2}\times\overline{FK}\times\overline{BD}+\overline{CA}\times\overline{GH}\\&=\overline{FK}\times\overline{BD}+\overline{CA}\times\overline{GH}\\&=\overline{CB}\times\overline{BD}+\overline{CA}\times\overline{GH}\\&=a^2+b^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*,*6*(2), 33-34.

2. 心得：此證明利用面積的相等關係，將正方形 *ABKH* 面積先轉換成兩個長方形的面積，再轉換成兩個平行四邊形的面積，最後再轉換成兩個正方形的面積，然後得到三個正方形的面積關係，進而推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●