勾股定理證明-G181

【作輔助圖】

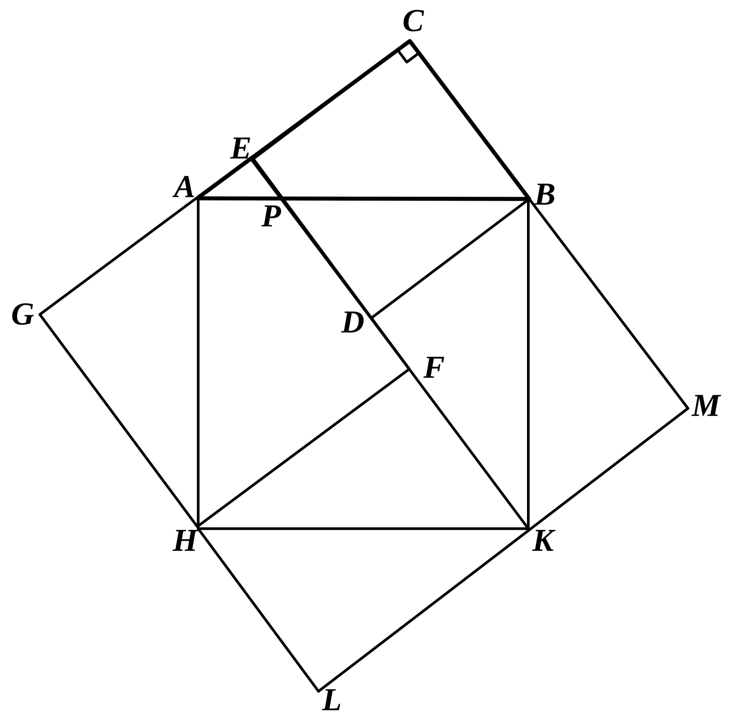
1. 以$\overline{BC}$為邊長向內作正方形$CBDE$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

2. 延長$\overrightarrow{CA}$至G點，延長$\overrightarrow{CB}$至M點，使得$\overline{AG}=\overline{CB}=a$, $\overline{BM}=\overline{CA}=b$.

3. $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{MK}$相交於L點。

4. $\overline{ED}$與$\overline{AB}$相交於P點，連$\overline{DK}$.

5. 過H點作垂直$\overline{DK}$的直線，交$\overline{DK}$於F點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$EFHG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形KBD全等於三角形ABC進而推得E, D, K共線：

   設$\angle CAB=x^\circ$, $\angle CBA=y^\circ$，且已知$x^\circ+y^\circ=90^\circ$。因為

$\angle ABD+\angle KBD=90^{\circ}=\angle CBA+\angle ABD$，所以$\angle KBD=\angle CBA=y^{\circ}$，又$\overline{BD}=a=\overline{BC}$,

$\overline{KB}=c=\overline{AB}$，因此

$$\Delta KBD\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}).$$

因為$\Delta KBD\cong\Delta ABC$，所以$\angle BDK=\angle BCA=90^{\circ}$，故

$$E-D-K\text{共線。}$$

2. 證明三角形HKF全等於三角形HAG：

因為$\Delta KBD\cong\Delta ABC$，所以$\angle DKB=\angle CAB=x^{\circ}$，又因為$\angle HFK=90^{\circ}=\angle ACB$,

$\overline{HK}=c=\overline{AB}$，所以

$$\Delta HKF\cong\Delta ABC\ (\text{AAS 全等}).$$

因為$\angle BAG+\angle CAB=90^{\circ}$, $\angle CAB=x^{\circ}$，所以$\angle BAG=90^{\circ}-x^{\circ}=y^{\circ}=\angle CBA$，又

$\overline{AG}=\overline{BC}=a$, $\overline{HA}=c=\overline{AB}$，因此

$$\Delta HAG\cong\Delta ABC\ (\text{SAS 全等}).$$

故

$$\Delta HKF\cong\Delta HAG.$$

3. 證明四邊形$EGHF$是正方形且面積為b^2：

因為$\Delta HAG\cong\Delta ABC$，所以$\angle HGA=\angle ACB=90^{\circ}$, $\overline{HG}=\overline{AC}=b$，又因為

$\Delta HKF\cong\Delta ABC$，所以$\overline{HF}=\overline{AC}=b$，因此

$$\text{四邊形}EGHF\text{的四個內角都是直角，}$$

又$\overline{HG}=\overline{HF}=b$，故

$$\text{四邊形}EGHF\text{是面積為}b^2\text{的正方形。}$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta BPD\text{面積} + \text{四邊形}APFH\text{面積} + \Delta HKF\text{面積} + \Delta KBD\text{面積} \\
&= \Delta BPD\text{面積} + \text{四邊形}APFH\text{面積} + \Delta HAG\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}CEPB\text{面積} + \Delta EAP\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}CEPB\text{面積} + \Delta BPD\text{面積}) + (\text{四邊形}APFH\text{面積} \\
&\quad + \Delta HAG\text{面積} + \Delta EAP\text{面積}) \\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積} + \text{正方形}EFHG\text{面積}，
\end{aligned}
$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Row, T. S. (1905). *Geometric exercises in paper folding* (p.14). Chicago, IL: Paquin Printers.

2. 心得：此證明的輔助圖剛好是一個大正方形，很有美感。此證明只要證明正方形 $ABKH$ 切割出來的四個區塊面積總和，恰好等於正方形 $CBDE$ 的面積加上正方形 $EFHG$ 的面積，就能得到勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：