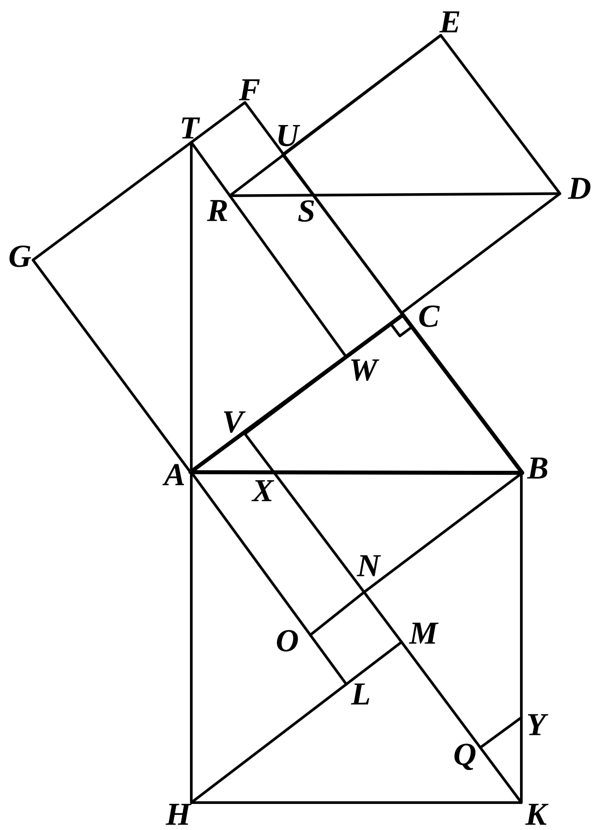
勾股定理證明-G164

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACFG$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.
2. 在$\overline{CF}$上取一點U點使得$\overline{CU}=\overline{BC}=a$，以$\overline{CU}$為邊長向外作正方形$CUED$.
3. $\overleftrightarrow{AH}$與$\overleftrightarrow{FG}$交於T點。
4. 過T點作垂直$\overline{AC}$的直線，交$\overline{AC}$於W點。
5. $\overleftrightarrow{EU}$與$\overleftrightarrow{TW}$交於R點，連$\overline{RD}$.
6. 過K點作垂直$\overline{AC}$的直線，分別交$\overline{AC}$, $\overline{AB}$於V點, X點。
7. 過H點作垂直$\overline{VK}$的直線，交$\overline{VK}$於M點。
8. 過A點作垂直$\overline{HM}$的直線，交$\overline{HM}$於L點。
9. 過B點作垂直$\overline{AL}$的直線，分別交$\overline{AL}$, $\overline{VK}$於O點, N點。
10. 在$\overline{VK}$上取一點Q點使得$\overline{QK}=\overline{UR}$.
11. 過Q點作垂直$\overline{VK}$的直線，交$\overline{BK}$於Y點。



【求證過程】

分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 向外作正方形 $ACFG$ 與正方形 $ABKH$ ，再作正方形 $CUED$ ，證明正方形 $ABKH$ 所切割出的所有區塊面積總和等於正方形 $CUED$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 AHL 全等於三角形 ATG ：

設 $\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$ ，且已知 $x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$ 。因為

$\angle HAL + \angle BAL = 90^{\circ} = \angle CAB + \angle BAL$，所以 $\angle HAL = \angle CAB$，又 $\angle ALH = 90^{\circ} = \angle ACB$,

$\overline{AH} = \overline{AB}$ ，可推得

$$\Delta AHL \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

因為 $\angle GAT + \angle TAW = 90^{\circ} = \angle CAB + \angle TAW$ ，所以 $\angle GAT = \angle CAB$ ，又

$\angle AGT = 90^{o} = \angle ACB$, $\overline{AG} = \overline{AC}$ ，可推得

$$\Delta ATG \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

故

$$\Delta AHL \cong \Delta ATG.$$

2. 證明三角形 KHM 全等於三角形 ATW ：

因為 $\Delta ATG \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{AT} = \overline{AB} = c = \overline{HK}$ ，又因為 $\angle HKM = y^{\circ} = \angle TAW$,

$\angle HMK = 90^{\circ} = \angle TWA$ ，所以

$$\Delta KHM \cong \Delta ATW \text{ (AAS 全等).}$$

3. 證明四邊形 $NOLM$ 與四邊形 $TFUR$ 都是面積為 $(b-a)^2$ 的正方形：

因為四邊形 $NOLM$ 的四個角都是直角， $\overline{OL} = \overline{AL} - \overline{AO} = \overline{AL} - \overline{CB} = b - a$,

$\overline{LM} = \overline{HM} - \overline{HL} = b - a$ ，所以

$$\text{四邊形} NOLM \text{是面積為} (b-a)^2 \text{的正方形。}$$

因為四邊形 $TFUR$ 的四個角都是直角， $\overline{TF} = \overline{GF} - \overline{TF} = b - a$,

$\overline{FU} = \overline{FC} - \overline{UC} = b - a$ ，所以

$$\text{四邊形} TFUR \text{也是面積為} (b-a)^2 \text{的正方形。}$$

4. 證明三角形 KBN 全等於三角形 RDE ：

因為 $\angle KBN + \angle ABN = 90^{\circ} = \angle CBA + \angle ABN$ ，所以 $\angle KBN = \angle CBA = y^{\circ}$ ，又

$\angle KNB = 90^{\circ} = \angle ACB$, $\overline{KB} = \overline{AB}$ ，可推得

$$\Delta KBN \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因為 $\overline{ER} = \overline{EU} + \overline{UR} = a + (b-a) = b = \overline{CA}$, $\overline{DE} = a = \overline{BC}$, $\angle RED = 90^{\circ} = \angle ACB$ ，所以

$$\Delta RDE \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

因此

$$\Delta KBN \cong \Delta RDE.$$

5. 利用 4.證明四邊形 $BNQY$ 面積等於四邊形 $DEUS$ 面積：

因為 $\Delta KBN \cong \Delta RDE$ ，所以

$$\text{四邊形} BNQY \text{面積} + \Delta YQK \text{面積} = \text{四邊形} DEUS \text{面積} + \Delta SUR \text{面積。}$$

又因為 $\angle YKQ = x^{\circ} = \angle SRU$, $\overline{QK} = \overline{UR}$, $\angle YQK = 90^{\circ} = \angle SUR$ ，所以

$$\Delta YQK \cong \Delta SUR \text{ (ASA 全等),}$$

因此

$$\Delta YQK\text{面積}=\Delta SUR\text{面積}。$$

故

$$\text{四邊形}BNQY\text{面積}=\text{四邊形}DEUS\text{面積}。$$

6. 證明三角形 XNB 全等於三角形 SCD ：

   因為 $\Delta KBN\cong\Delta ABC$ ，所以 $\overline{BN}=\overline{BC}=a=\overline{DC}$ ，又

   $\angle XBN+\angle CBA=90^{\circ}=\angle SDC+\angle EDR$, $\Delta RDE\cong\Delta ABC$ ，可推得 $\angle CBA=\angle EDR$ 。因

   為 $\angle CBA=\angle EDR$ ，所以 $\angle XBN=\angle SDC$ ，又 $\angle XNB=90^{\circ}=\angle SCD$ ，因此

$$\Delta XNB\cong\Delta SCD\,(\text{ASA 全等}).$$

7. 證明四邊形 $XNOA$ 全等於四邊形 $SCWR$ ：

   因為 $\angle BXN=90^{\circ}-x^{\circ}=y^{\circ}=\angle DSC$ ，所以 $\angle AXN=180^{\circ}-y^{\circ}=\angle RSC$,

   $\angle XNO=90^{\circ}=\angle SCW$, $\angle NOA=90^{\circ}=\angle CWR$ ，因此

$$\text{四邊形}XNOA\text{與四邊形}SCWR\text{的四個內角都對應相等。}$$

   又因為 $\Delta XNB\cong\Delta SCD$ ，所以 $\overline{XN}=\overline{SC}$ ，又 $\overline{NO}=b-a=\overline{CW}$ ，因此

$$\text{四邊形}XNOA\cong\text{四邊形}SCWR.$$

8. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積}&=\Delta AHL\text{面積}+\Delta KHM\text{面積}+\text{四邊形}NOLM\text{面積}+\text{四邊形}BNQY\text{面積}\\
&\quad+\Delta XNB\text{面積}+\text{四邊形}XNOA\text{面積}+\Delta YQK\text{面積}\\
&=\Delta ATG\text{面積}+\Delta ATW\text{面積}+\text{四邊形}TFUR\text{面積}+\text{四邊形}DEUS\text{面積}\\
&\quad+\Delta SCD\text{面積}+\text{四邊形}SCWR\text{面積}+\Delta SUR\text{面積}\\
&=(\text{四邊形}DEUS\text{面積}+\Delta SCD\text{面積})+(\Delta ATG\text{面積}+\Delta ATW\text{面積}\\
&\quad+\text{四邊形}TFUR\text{面積}+\text{四邊形}SCWR\text{面積}+\Delta SUR\text{面積})\\
&=\text{正方形}CUED\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積}，
\end{aligned}$$

   即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是 Richard A. Bell 在 1914 年 7 月 13 日想到的，並在 1938 年 2 月 28 日交給他。

2. 心得：此證明切割出許多區塊，但是整個證明滿直觀的，就是證明正方形 $ABKH$ 所切割出的所有區塊面積等於正方形 $CUED$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，

便能得到三個正方形的面積關係，進而推導出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：