勾股定理證明-G163

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACFG$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.

2. 在$\overline{BK}$上取一點M點使得$\overline{BM}=\overline{BC}=a$，以$\overline{BM}$為邊長向外作正方形$BMDE$.

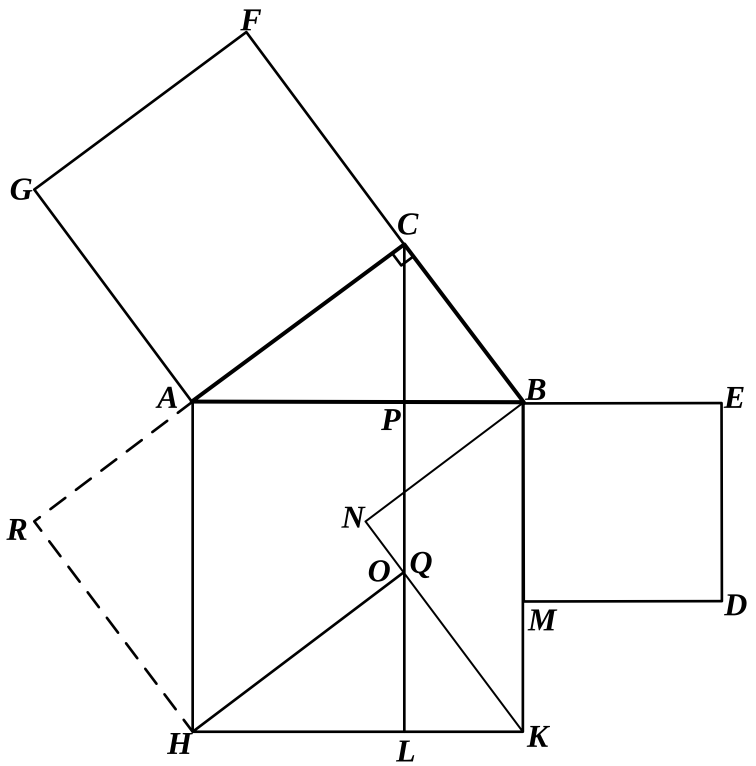
3. 過C點作垂直$\overline{AB}$的直線，交$\overline{AB}$, $\overline{HK}$於P點, L點。

4. 過B點作平行$\overline{CA}$的直線，並在直線上取一點N點使得$\overline{BN}=\overline{BC}=a$，連$\overline{BN}$, $\overline{NK}$，

   且$\overline{NK}$交$\overline{CL}$於Q點，連$\overline{BQ}$.

5. 過H點作平行$\overline{AC}$的直線，交$\overline{CL}$於O點。

6. 過H點作垂直$\overleftrightarrow{AC}$的直線，交$\overleftrightarrow{AC}$於R點。



【求證過程】

以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$，以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACFG$，以$\overline{BM}$為邊長向外作正方形$BMDE$。正方形$ABKH$面積等於長方形$PBKL$的面積加上長方形

$APLH$ 的面積，證明長方形 $PBKL$ 的面積等於正方形 $ACFG$ 的面積，同時長方形 $APLH$ 的面積也與正方形 $BMDE$ 的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 KBN 全等於三角形 ABC，進而推得四邊形 $QKBC$ 為平行四邊形：

   設 $\angle CAB = x^{\circ},\ \angle CBA = y^{\circ}$，且已知 $x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$。因為

   $\angle KBN + \angle ABN = 90^{\circ} = \angle CBA + \angle ABN$，所以 $\angle KBN = \angle CBA$，又 $\overline{BN} = \overline{BC},$

   $\overline{KB} = \overline{AB}$，可推得

   $$\Delta KBN \cong \Delta ABC\ (\text{SAS 全等}),$$

   即 $\angle BNK = \angle BCA = 90^{\circ}$，又因為 $\angle CBN = 90^{\circ}$，所以 $\overline{KN} // \overline{BC}$。故

   $$\text{四邊形}QKBC\text{為平行四邊形。}$$

2. 證明三角形 HAR 全等於三角形 ABC，進而推得 $\overline{HR} = \overline{AC}$：

   因為 $\angle CAB + \angle HAR = 90^{\circ}$，所以 $\angle HAR = y^{\circ} = \angle CBA$，又 $\angle HRA = 90^{\circ} = \angle ACB,$

   $\overline{AH} = \overline{AB}$，因此

   $$\Delta HAR \cong \Delta ABC\ (\text{AAS 全等}).$$

   故

   $$\overline{HR} = \overline{AC}.$$

3. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{矩形}PBKL\text{面積} + \text{矩形}APLH\text{面積} \\
&= \text{平行四邊形}QKBC\text{面積} + \text{平行四邊形}HOCA\text{面積} \\
&= 2\Delta BQK\text{面積} + \text{平行四邊形}HOCA\text{面積} \\
&= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{QK} \times \overline{BN} + \overline{CA} \times \overline{RH} \\
&= \overline{CB} \times \overline{BN} + \overline{CA} \times \overline{RH} \\
&= \overline{CB} \times \overline{BC} + \overline{CA} \times \overline{CA} \\
&= \overline{BC} \times \overline{BC} + \overline{BM} \times \overline{BM} \\
&= \text{正方形}ACFG\text{面積} + \text{正方形}BMDE\text{面積，}
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他

想到的。

2. 心得：此證明先將正方形 $ABKH$ 面積轉換成長方形 $PBKL$ 的面積以及長方形 $APLH$ 的面積，再利用面積相等的關係，將兩個長方形面積轉換成兩個正方形面積，最後推導出三個正方形的面積關係。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 補充：在魯米斯書中所繪的圖形並沒有 R 點，有 R 點是為了證明平行四邊形 $HOCA$ 的面積等於正方形 $BMDE$ 的面積。先證明 $\Delta HAR \cong \Delta ABC$ 推得 $\overline{HR} = \overline{AC}$ ，而平行四邊形 $HOCA$ 的面積等於 $\overline{CA} \times \overline{RH}$ ，也就是 $\overline{CA}^2$ ，因此平行四邊形 $HOCA$ 的面積等於正方形 $BMDE$ 的面積。