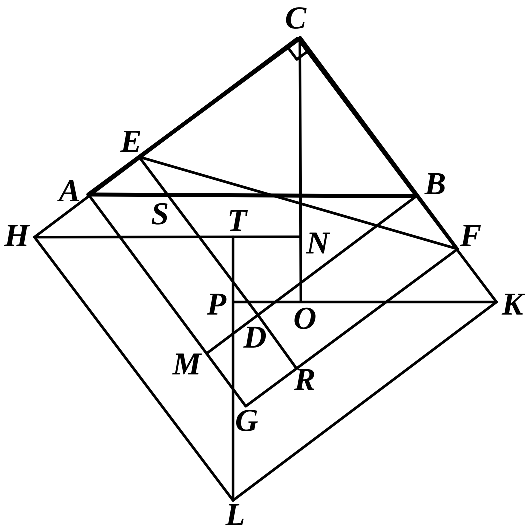
勾股定理證明-G162

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$CBDE$和正方形$ACFG$.
2. 延長$\overline{CF}$至K點，使得$\overline{CK}=\overline{AB}$，以$\overline{CK}$為邊長作正方形$CKLH$.
3. 過K點作與$\overline{AB}$平行的直線，過C點作與$\overline{AB}$垂直的直線，兩直線交於O點，連$\overline{OC}$，$\overline{OK}$.
4. 過H點作與$\overline{CO}$垂直的直線，交$\overline{CO}$於N點，連$\overline{HN}$.
5. 過L點作與$\overline{HN}$垂直的直線，交$\overline{HN}$於T點，連$\overline{LT}$.
6. 延長$\overline{KO}$至P點，連$\overline{OP}$.
7. $\overleftrightarrow{AG}$與$\overleftrightarrow{BD}$交於M點，連$\overline{DM}$；$\overleftrightarrow{ED}$與$\overleftrightarrow{FG}$交於R點，連$\overline{DR}$.
8. $\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{ED}$交於S點。
9. 連$\overline{EF}$.



【求證過程】

分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，再正方形$CKLH$，證明正方形$CKLH$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形

$ACFG$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 CKO 全等於三角形 ABC ：

   設 $\angle CAB = x^\circ, \ \angle CBA = y^\circ$ ，且已知 $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$ ，則 $\angle KCO = 90^\circ - \angle CBA = x^\circ$ 。因為

   $\overline{CK} = \overline{AB}, \ \angle KCO = x^\circ = \angle CAB, \ \angle COK = 90^\circ = \angle ACB$ ，所以

$$\Delta CKO \cong \Delta ABC \text{ (AAS).}$$

2. 證明三角形 HCN 全等於三角形 BAM ：

   因為 $\angle HCN = y^\circ = \angle CBA, \ \angle HNC = 90^\circ = \angle ACB, \ \overline{HC} = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta HCN \cong \Delta ABC \text{ (AAS).}$$

   因為 $\overline{AB} = \overline{AB}, \ \angle MBA = x^\circ = \angle CAB, \ \angle MAB = \angle CBA$ ，所以

$$\Delta BAM \cong \Delta ABC \text{ (ASA).}$$

   故

$$\Delta HCN \cong \Delta BAM.$$

3. 證明三角形 LHT 全等於三角形 FEC ：

   因為 $\angle THL = y^\circ = \angle CBA, \ \angle TLH = x^\circ = \angle CAB, \ \overline{HL} = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta LHT \cong \Delta ABC \text{ (ASA).}$$

   因為 $\overline{EC} = \overline{BC}, \ \overline{FC} = \overline{AC}, \ \angle FCE = 90^\circ = \angle ACB$ ，所以

$$\Delta FEC \cong \Delta ABC \text{ (SAS).}$$

   故

$$\Delta LHT \cong \Delta FEC.$$

4. 證明三角形 KLP 全等於三角形 EFR ：

   因為 $\angle PLK = y^\circ = \angle CBA, \ \angle PKL = x^\circ = \angle CAB, \ \overline{KL} = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta KLP \cong \Delta ABC \text{ (ASA).}$$

   因為 $\overline{FR} = \overline{BC}, \ \overline{ER} = \overline{AC}, \ \angle ERF = 90^\circ = \angle ACB$ ，所以

$$\Delta EFR \cong \Delta ABC \text{ (SAS).}$$

   故

$$\Delta KLP \cong \Delta EFR.$$

5. 證明四邊形 $TNOP$ 與四邊形 $MDRG$ 都是面積為 $(b-a)^2$ 的正方形：

   因為四邊形 $TNOP$ 的四個內角都是直角，且 $\overline{TN} = \overline{NO} = b - a$ ，所以

$$\text{四邊形}TNOP\text{是面積為}(b-a)^2\text{的正方形。}$$

又因為四邊形 $MDRG$ 的四個內角都是直角，且 $\overline{MD}=\overline{DR}=b-a$ ，所以

$$\text{四邊形}MDRG\text{也是面積為}(b-a)^2\text{的正方形。}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}CKLH\text{面積} &= \Delta CKO\text{面積}+\Delta HCN\text{面積}+\Delta LHT\text{面積}\\
&\quad +\Delta KLP\text{面積}+\text{正方形}TNOP\text{面積}\\
&=\Delta ABC\text{面積}+\Delta BAM\text{面積}+\Delta FEC\text{面積}\\
&\quad +\Delta EFR\text{面積}+\text{正方形}MDRG\text{面積}\\
&=(\text{四邊形}ECBS\text{面積}+\Delta AES\text{面積})+(\text{四邊形}ASDM\text{面積}+\Delta SBD\text{面積})\\
&\quad +\Delta FEC\text{面積}+\Delta EFR\text{面積}+\text{正方形}MDRG\text{面積}\\
&=(\text{四邊形}ECBS\text{面積}++\Delta SBD\text{面積})+(\Delta AES\text{面積}+\text{四邊形}ASDM\text{面積}\\
&\quad +\Delta FEC\text{面積}+\Delta EFR\text{面積}+\text{正方形}MDRG\text{面積})\\
&=\text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積，}
\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源： 根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他想到的。

2. 心得： 此證明的輔助圖恰為一個面積是 c^2 的正方形，只要證明這個正方形切割出來的區塊，面積總和剛好等於正方形 $CBDE$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，就可以順利得到勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●