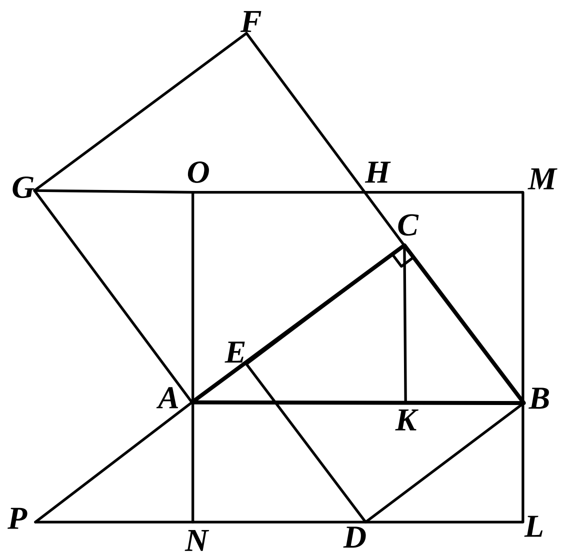
勾股定理證明-G161

【作輔助圖】

1. 以$\overline{BC}$為邊長向內作正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACFG$.
2. 作過A點垂直$\overline{AB}$的直線，作過B點垂直$\overline{AB}$的直線，再作過D點作平行$\overline{AB}$的直線，分別交於N點，L點。
3. 以$\overline{NL}$為邊長作正方形$NLMO$，$\overline{MO}$交$\overline{CF}$於H點。
4. 連$\overline{OG}$.
5. $\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{LN}$相交於P點，連$\overline{AP}$，$\overline{NP}$.
6. 作過C點且垂直$\overline{AB}$的直線，交$\overline{AB}$於K點，連$\overline{CK}$.



【求證過程】

以$\overline{BC}$為邊長向內作正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACFG$，正方形$NLMO$面積等於長方形$ABLN$的面積加上長方形$ABMO$的面積，需證明長方形$ABLN$的面積等於正方形$CBDE$的面積，長方形$ABMO$的面積也與正方形$ACFG$的面積相等，就能推導出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形$ABDP$為平行四邊形且面積為a^2：

因為$\overline{AB}//\overline{PD}$且$\overline{BD}//\overline{AP}$，所以

$$四邊形ABDP為平行四邊形，$$

即 $\overline{PD}=\overline{AB}=c$，又 $\overline{EP}=\sqrt{\overline{PD}^2-\overline{DE}^2}=\sqrt{c^2-a^2}=b$, $\overline{AP}=\overline{EP}-\overline{EA}=b-(b-a)=a$,

故

$$\begin{aligned}平行四邊形ABDP面積 &= \overline{AP}\times\overline{CB}\\ &= a^2.\end{aligned}$$

2. 證明三角形 GAO 全等於三角形 CAK，進而推得 $G-O-M$ 共線：

因為平行四邊形 $ABDP$ 面積= $a^2=\overline{PD}\times\overline{AN}$，所以 $\overline{AN}=\dfrac{a^2}{\overline{PD}}=\dfrac{a^2}{\overline{AB}}=\dfrac{a^2}{c}$,

$\overline{AO}=c-\overline{AN}=c-\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{c^2-a^2}{c}=\dfrac{b^2}{c}$，又 $\overline{AC}^2=\overline{AK}\times\overline{AB}$，可推得

$\overline{AK}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}}=\dfrac{b^2}{c}=\overline{AO}$。因為 $\angle GAO+\angle OAC=90^\circ=\angle OAC+\angle CAK$，所以

$\angle GAO=\angle CAK$，又 $\overline{AG}=\overline{AC}$，因此

$$\Delta GAO\cong\Delta CAK\ (\text{SAS}),$$

即 $\angle GOA=\angle CKA=90^\circ$，故

$$G-O-M共線。$$

3. 證明四邊形 $ABHG$ 為平行四邊形且面積為 b^2：

因為 $\overline{AB}//\overline{GH}$ 且 $\overline{HB}//\overline{GA}$，所以

$$四邊形ABHG為平行四邊形，$$

故

$$\begin{aligned}平行四邊形ABHG面積 &= \overline{BH}\times\overline{FG}\\ &= \overline{AG}\times\overline{FG}\\ &= b^2.\end{aligned}$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}正方形NLMO面積 &= 矩形ABLN面積+矩形ABMO面積\\ &= 平行四邊形ABDP面積+平行四邊形ABHG面積\\ &= a^2+b^2,\end{aligned}$$

又

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}NLMO\text{面積} &= \overline{AB} \times \overline{AB} \\
&= c^2,
\end{aligned}
$$

故

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 27). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明先將正方形 $NLMO$ 面積轉換成兩個長方形面積，接著再轉換成兩個平行四邊形的面積，最後轉換成兩個正方形面積，最後推出勾股定理的關係式。

   平行四邊形 $ABDP$ 的面積為 a^2 以及平行四邊形 $ABHG$ 的面積為 b^2 並不直觀，必須經過嚴謹的證明才能推得。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●