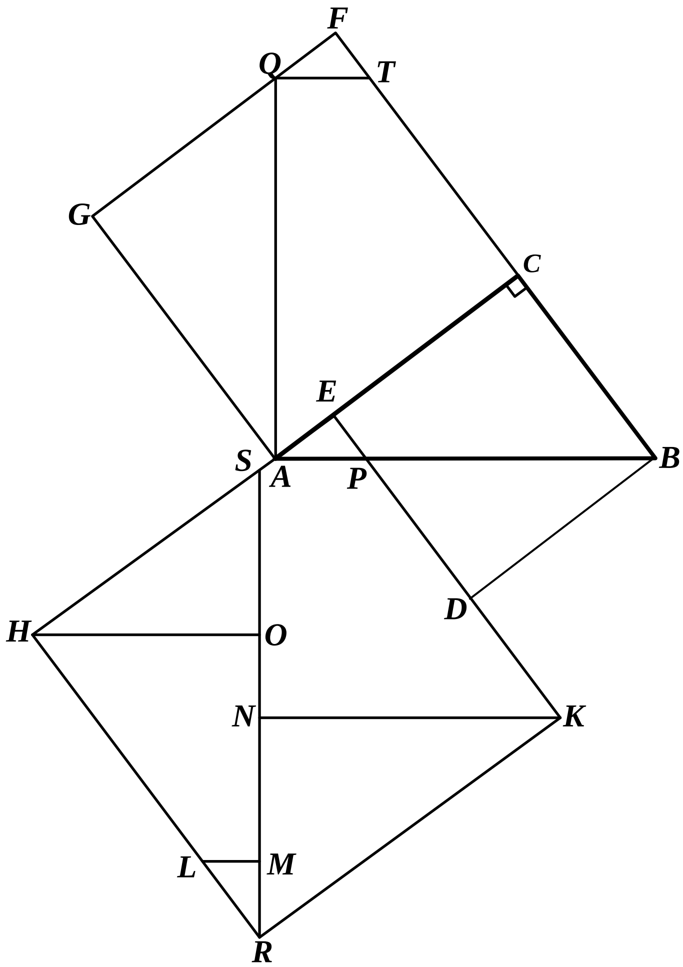
勾股定理證明-G160

【作輔助圖】

1. 以$\overline{BC}$為邊長向內作正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$ACFG$.
2. 在直線ED上取一點K點，使得$\overline{EK}=\overline{AC}=b$，以$\overline{EK}$為邊長作正方形$EKRH$.
3. $\overline{AB}$與$\overline{ED}$相交於P點.
4. 過A點作垂直$\overline{AB}$的直線，交$\overline{FG}$於Q點。
5. 過Q點作垂直$\overline{AQ}$的直線，交$\overline{FC}$於T點.
6. 過R點作垂直直線AB的直線，交$\overline{EH}$於S點。
7. 分別作過K點,H點垂直$\overline{SR}$的直線，分別交$\overline{SR}$於N點,O點。
8. 在$\overline{HR}$上取一點L點，使得$\overline{RL}=\overline{AP}$.
9. 過L點作垂直$\overline{SR}$的直線，交$\overline{SR}$於M點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的 $\overline{CB}$ 為邊長向內作正方形 $CBDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊長向外作正方形 $ACFG$，再以 $\overline{EK}$ 為邊長向外作正方形 $EKRH$，證明正方形 $EKRH$ 所切割出的所有區塊面積總和等於正方形 $CBDE$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 首先證明三角形 RHO 與三角形 ABC 全等：

   設 $\angle CAB = x^\circ$, $\angle CBA = y^\circ$，且已知 $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$。因為 $\overline{AB} // \overline{HO}$，所以 $\angle SHO = \angle CAB = x^\circ$，可推得 $\angle RHO = 90^\circ - \angle SHO = 90^\circ - \angle CAB = \angle CBA = y^\circ$，又 $\angle ROH = 90^\circ = \angle ACB$, $\overline{RH} = c = \overline{AB}$，因此

$$\Delta RHO \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等).}$$

2. 利用第 1 點證明三角形 RML 與三角形 AEP 全等：

因為 $\Delta RHO \cong \Delta ABC$，所以 $\angle ORH = \angle CAB$，可推得 $\angle MRL = \angle EAP$，又 $\overline{RL} = \overline{AP}$，

$\angle RML = 90^\circ = \angle AEP$，故

$$\Delta RML \cong \Delta AEP \text{ (AAS 全等)}.$$

3. 利用第 1、2 點證明四邊形 $MLHO$ 與四邊形 $EPBC$ 全等：
因為 $\Delta RHO \cong \Delta ABC$，$\Delta RML \cong \Delta AEP$，所以

$$\text{四邊形}MLHO \cong \text{四邊形}EPBC.$$

4. 證明三角形 HSO 與三角形 BPD 全等：

因為 $\Delta RHO \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{HO} = \overline{BC} = a = \overline{BD}$，又

$\angle SHO = 90^\circ - \angle OHR = 90^\circ - \angle CBA = \angle PBD$，$\angle HOS = 90^\circ = \angle BDP$，因此

$$\Delta HSO \cong \Delta BPD \text{ (ASA 全等)}.$$

5. 證明三角形 ABC 與三角形 KRN、三角形 AQG 皆全等：

因為 $\angle KRN = 90^\circ - \angle ORH = 90^\circ - x^\circ = \angle CBA$，$\angle KNR = 90^\circ = \angle ACB$，$\overline{KR} = c = \overline{AB}$，

所以

$$\Delta KRN \cong \Delta ABC \text{ (AAS 全等)}.$$

又因為 $\angle GAQ = 90^\circ - \angle QAC = \angle CAB$，$\angle AGQ = 90^\circ = \angle ACB$，$\overline{KR} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta AQG \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

故

$$\Delta KRN \cong \Delta ABC \cong \Delta AQG.$$

6. 證明四邊形 $SEKN$ 與四邊形 $TQAC$ 全等：

因為 $\angle EKN = 90^\circ - \angle NKR = 90^\circ - \angle CAB = \angle QAC$，$\angle KNR = 90^\circ = \angle ACB$，

$\angle SEK = 90^\circ = \angle TQA$，$\angle SNK = 90^\circ = \angle TCS$，所以

$$\text{四邊形}SEKN\text{與四邊形}TQAC\text{的四個內角都對應相等。}$$

因為 $\Delta AQG \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{QA} = c = \overline{EK}$。因為 $\Delta KRN \cong \Delta ABC$，所以 $\overline{KN} = b = \overline{AC}$。

因此

$$\text{四邊形}SEKN \cong \text{四邊形}TQAC.$$

7. 再證明三角形 QFT 與三角形 AEP 全等：

因為 $\overline{QF} = \overline{QF} - \overline{GQ} = b - a = \overline{AE}$，$\angle FQT = 90^\circ - \angle AQG = 90^\circ - \angle ABC = \angle EAP$，

$\angle QFT = 90^\circ = \angle AEP$，所以

$$\Delta QFT \cong \Delta AEP \text{ (ASA 全等)}.$$

8. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}EKRH\text{面積} &= \Delta RML\text{面積} + \text{四邊形}MLOH\text{面積} + \Delta HSO\text{面積} + \Delta KRN\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}SEKN\text{面積} \\
&= \Delta AEP\text{面積} + \text{四邊形}EPBC\text{面積} + \Delta BPD\text{面積} + \Delta AQG\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}TQAC\text{面積} \\
&= \Delta QFT\text{面積} + \text{四邊形}EPBC\text{面積} + \Delta BPD\text{面積} + \Delta AQG\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}TQAC\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}EPBC\text{面積} + \Delta BPD\text{面積}) + (\Delta QFT\text{面積} + \Delta AQG\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}TQAC\text{面積}) \\
&= \text{正方形}CBDE + \text{正方形}ACFG\text{面積。}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他想到的。
2. 心得：此證明的證法滿直觀的，先將正方形 $EKRH$ 切割成若干個區塊，接下來只要證明這些區塊的面積等於正方形 $CBDE$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，最後就能得到三個正方形的面積關係，進而推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：

(1) 此證明在魯米斯的書中所提的作圖是錯誤的，書上畫的是 $\overline{AR}$ 而不是 $\overline{SR}$ ，事實上，直線 AR 並不會垂直 $\overline{AB}$ ， S 點與 A 點應該是不同的點。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：