勾股定理證明-G159

【作輔助圖】

1. 以$\overline{BC}$為邊長向外作正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$ACFG$.

2. 延長$\overline{BF}$至H點使得$\overline{BH}=\overline{AB}$，延長$\overline{BD}$至$Q$點使得$\overline{BQ}=\overline{AB}$，作正方形$BHKQ$.

3. 過B點作垂直$\overline{AB}$的直線，分別交$\overline{CE}$, $\overline{FG}$於P點, M點。

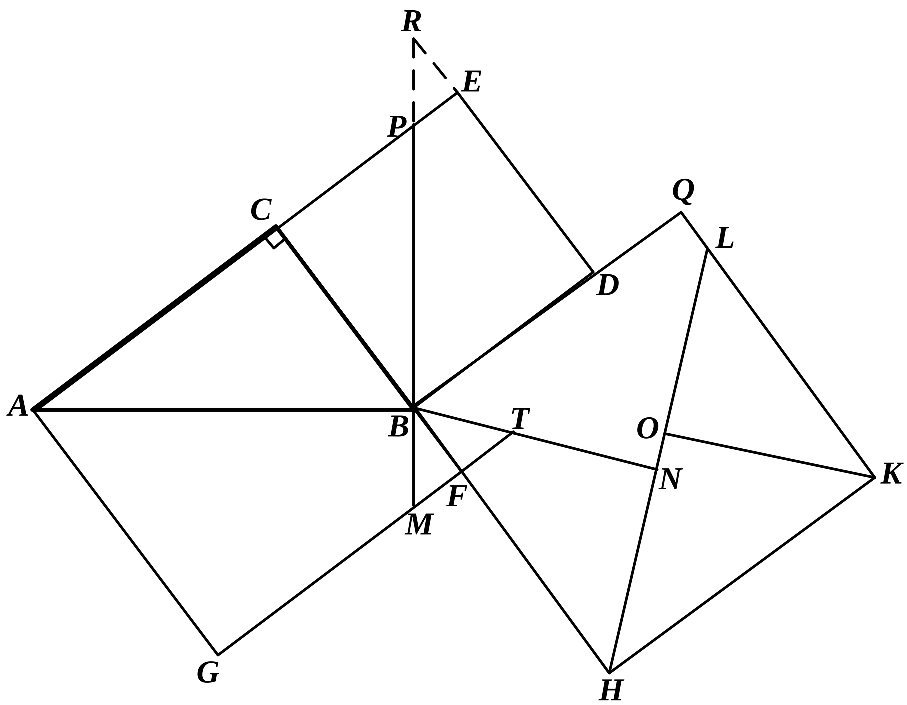
4. 在$\overline{KQ}$取一點L點使得$\overline{KL}=\overline{PB}$，連$\overline{LH}$.

5. 過K點作垂直$\overline{LH}$的直線，交$\overline{LH}$於O點，連$\overline{KO}$.

6. 過B點作垂直$\overline{LH}$的直線，交$\overline{LH}$於N點，連$\overline{BN}$.

7. 過F點作垂直$\overline{BH}$的直線，交$\overline{BN}$於T點，連$\overline{FT}$.

8. 直線$\overleftrightarrow{DE}$與直線$\overleftrightarrow{BP}$交於R點，連$\overline{RE}$, $\overline{RP}$.



【求證過程】

分別以$\overline{BC}$, $\overline{AC}$為邊長向外作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，再作正方形$BHKQ$，證明正方形$BHKQ$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加

上正方形 $ACFG$ 的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 HKO 與三角形 ABC 全等：

   設 $\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$，且已知 $x^{\circ} + y^{\circ} = 90^{\circ}$，則 $\angle PBC = 90^{\circ} - \angle CBA = x^{\circ}$,

   $\angle CPB = 90^{\circ} - \angle PBC = y^{\circ}$。因為 $\overline{LK} = \overline{PB}$, $\overline{HK} = \overline{AB}$, $\angle LKH = \angle PBA$，所以

   $$\Delta LKH \cong \Delta PBA \text{ (SAS)},$$

   因為 $\angle HLK = \angle APB = y^{\circ}$, $\angle KHL = \angle BAP = x^{\circ}$，所以 $\angle OKH = y^{\circ}$, $\angle LKO = x^{\circ}$。因為

   $\angle OHK = \angle CAB = x^{\circ}$, $\angle OKH = y^{\circ} = \angle CBA$, $\overline{HK} = \overline{AB}$，所以

   $$\Delta HKO \cong \Delta ABC \text{ (ASA)}.$$

2. 證明三角形 LKO 與三角形 PBC 全等：

   因為 $\angle LKO = x^{\circ} = \angle PBC$, $\angle OLK = y^{\circ} = \angle CPB$, $\overline{LK} = \overline{PB}$，所以

   $$\Delta LKO \cong \Delta PBC \text{ (ASA)}.$$

3. 證明三角形 TBF 與三角形 MBF 全等：

   因為 $\angle KHL = x^{\circ}$，所以 $\angle NHB = y^{\circ}$, $\angle TBF = x^{\circ}$。因為 $\angle TBF = x^{\circ} = \angle PBC = \angle MBF$,

   $\angle TBF = 90^{\circ} = \angle MBF$, $\overline{BF} = \overline{BF}$，所以

   $$\Delta TBF \cong \Delta MBF \text{ (ASA)}.$$

4. 證明三角形 RBD 與三角形 BHN 全等：

   因為 $\overline{BD} = \overline{BC}$, $\angle BDR = 90^{\circ} = \angle BCA$, $\angle RBD = \angle ABC$，所以

   $$\Delta RBD \cong \Delta ABC \text{ (ASA)},$$

   又因為 $\angle NBH = x^{\circ} = \angle CAB$, $\angle NHB = y^{\circ} = \angle CBA$, $\overline{BH} = \overline{AB}$，所以

   $$\Delta BHN \cong \Delta ABC \text{ (ASA)},$$

   故

   $$\Delta RBD \cong \Delta BHN.$$

5. 證明四邊形 $PEDB$ 面積與四邊形 $TNHF$ 面積相等：

   因為 $\angle PRE = x^{\circ} = \angle TBF$, $\overline{RE} = b - a = \overline{BF}$, $\angle REP = 90^{\circ} = \angle BFT$，所以

   $$\Delta PRE \cong \Delta TBF \text{ (ASA)}.$$

   又因為 $\Delta RBD \cong \Delta BHN$，所以 $\Delta RBD\text{面積} = \Delta BHN\text{面積}$，故

$$
\begin{aligned}
\text{四邊形}PEDB\text{面積} &= \Delta BNH\text{面積} - \Delta TBF\text{面積}\\
&= \Delta RBD\text{面積} - \Delta PRE\text{面積}\\
&= \text{四邊形}TNHF\text{面積。}
\end{aligned}
$$

6. 證明四邊形 $BNLQ$ 與四邊形 $AGMB$ 全等：

   在四邊形 $BNLQ$ 與四邊形 $AGMB$ 中，因為 $\angle BNL = 90^\circ = \angle AGM$， $\angle LQB = 90^\circ = \angle MBA$， $\angle QBN = y^\circ = \angle BAG$， $\angle NLQ = 180^\circ - y^\circ = \angle GMB$ ，所以

   $$\text{四邊形}BNLQ\text{與四邊形}AGMB\text{的四個內角都對應相等。}$$

   又因為 $\Delta BHN \cong \Delta ABC$ ，所以 $\overline{BN} = \overline{AC} = \overline{AG}$， $\overline{BQ} = \overline{AB}$ ，故

   $$\text{四邊形}BNLQ \cong \text{四邊形}AGMB.$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}BHKQ\text{面積} &= \text{四邊形}TNHF\text{面積} + \Delta HKO\text{面積} + \Delta LKO\text{面積}\\
&\quad + \text{四邊形}BNLQ\text{面積} + \Delta TBF\text{面積}\\
&= \text{四邊形}PEDB\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} + \Delta PBC\text{面積}\\
&\quad + \text{四邊形}AGMB\text{面積} + \Delta MBF\text{面積}\\
&= (\text{四邊形}PEDB\text{面積} + \Delta PBC\text{面積}) + (\Delta ABC\text{面積}\\
&\quad + \text{四邊形}AGMB\text{面積} + \Delta MBF\text{面積})\\
&= \text{正方形}CBDE + \text{正方形}ACFG\text{面積。}
\end{aligned}
$$

   得到

   $$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

   即

   $$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源： 根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他想到的。
2. 心得：此證明的證法比較直觀，就是先將正方形 $BHKQ$ 切割成若干個區塊，接下來只要證明這些區塊的面積等於正方形 $CBDE$ 的面積加上正方形 $ACFG$ 的面積，最後就能推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				

4. 補充：在魯米斯書中所繪的圖形並沒有ΔPRE，是為了方便證明四邊形$PEDB$面積與四邊形$TNHF$面積相等。先證明$\Delta RBD \cong \Delta BHN$，再證明$\Delta PRE \cong \Delta TBF$，進而推導出四邊形$PEDB$面積與四邊形$TNHF$面積相等。