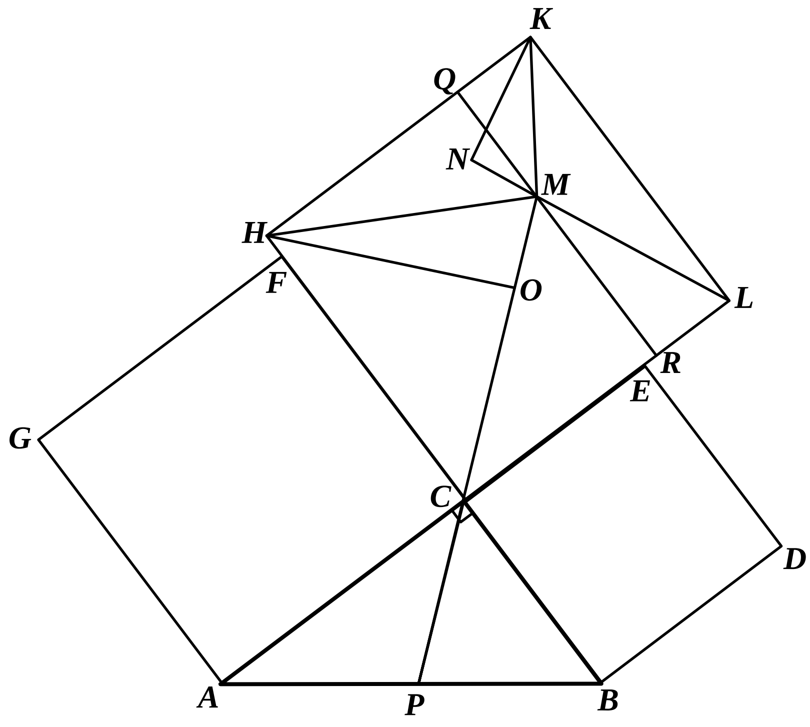
勾股定理證明-G158

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$CBDE$，正方形$ACFG$.
2. 延長$\overline{CF}$至H點使得$\overline{CH}=\overline{AB}$，延長$\overline{CE}$至$L$點使得$\overline{CL}=\overline{AB}$，作正方形$CHKL$.
3. 作$\overline{AB}$的中點P點，延長$\overline{PC}$至M點使得$\overline{CM}=\overline{AC}$.
4. 連$\overline{HM}$，$\overline{KM}$以及$\overline{LM}$.
5. 過H點作垂直$\overline{CM}$的直線，交$\overline{CM}$於O點，連$\overline{HO}$.
6. 過K點作垂直$\overleftrightarrow{LM}$的直線，交$\overleftrightarrow{LM}$於N點，連$\overline{KN}$.
7. 過M點作平行$\overleftrightarrow{KL}$的直線，分別交$\overline{KH}$，$\overline{LC}$於Q點，R點，連$\overline{QR}$.



【求證過程】

分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向外作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，再作面積為c^2的正方形$CHKL$，正方形$CHKL$面積等於長方形$KLRQ$的面積加上長方形$CHQR$的面積，證明長方形$KLRQ$的面積等於正方形$CBDE$的面積，同時長方形$CHQR$的面積也與正方形

$ACFG$ 的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明 $\overline{HO}$ 等於 $\overline{AC}$ ：

   因為 ΔABC 為直角三角形，且 P 點為 $\overline{AB}$ 的中點，所以 P 點為 ΔABC 的外心，可推得

   $$\overline{PA} = \overline{PC} \text{且} \overline{PC} = \overline{PB}.$$

   設 $\angle CAB = x^\circ$, $\angle CBA = y^\circ$，且已知 $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$。因為 $\overline{PA} = \overline{PC}$ ，所以 $\angle ACP = \angle CAP = x^\circ$。因為 $\angle HCO + \angle ACP = 90^\circ$，所以 $\angle HCO = y^\circ = \angle CBA$ ，又因為 $\angle OHC + \angle HCO = 90^\circ$，所以 $\angle OHC = x^\circ = \angle CAB$ ，又 $\overline{HC} = \overline{AB}$ ，因此

   $$\Delta HCO \cong \Delta ABC \text{ (ASA)},$$

   故

   $$\overline{HO} = \overline{AC}.$$

2. 證明 $\overline{ML}$ 等於 $\overline{BC}$ ：

   因為 $\overline{PC} = \overline{PB}$ ，所以 $\angle PCB = \angle PBC = y^\circ$ 。因為 $\angle MCL + \angle PCB = 90^\circ$，所以 $\angle MCL = x^\circ = \angle CAB$ ，又 $\overline{CM} = \overline{AC}$, $\overline{CL} = \overline{AB}$ ，因此

   $$\Delta CLM \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)}.$$

   故

   $$\overline{ML} = \overline{BC}.$$

3. 證明 $\overline{KN}$ 等於 $\overline{BC}$ ：

   因為 $\angle KLN + \angle MLC = 90^\circ$, $\angle MLC = y^\circ$，所以 $\angle KLN = x^\circ = \angle CAB$ ，又因為 $\angle KLN + \angle LKN = 90^\circ$，所以 $\angle LKN = y^\circ = \angle CBA$ ，又 $\overline{LK} = \overline{AB}$ ，因此 $\Delta LKN \cong \Delta ABC$ (ASA)，故

   $$\overline{KN} = \overline{BC}.$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}CHKL\text{面積} &= \text{長方形}CHQR\text{面積} + \text{長方形}KLRQ\text{面積} \\
&= 2\Delta CMH\text{面積} + 2\Delta LMK\text{面積} \\
&= 2\times\frac{1}{2}\times\overline{CM}\times\overline{HO} + 2\times\frac{1}{2}\times\overline{ML}\times\overline{KN} \\
&= \overline{CM}\times\overline{HO} + \overline{ML}\times\overline{KN} \\
&= \overline{AC}\times\overline{AC} + \overline{BC}\times\overline{BC} \\
&= \text{正方形}ACFG + \text{正方形}CBDE\text{面積，}
\end{aligned}
$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源： 根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1900 年 8 月 4 日想到的。
2. 心得：此證明將正方形 $CHKL$ 面積轉換成兩倍的 ΔCMH 面積以及兩倍的 ΔLMK 面積，最後再轉換成兩個正方形的面積。此證明從輔助圖看來，並不直觀，必須經由證明去推導，才能得到勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●