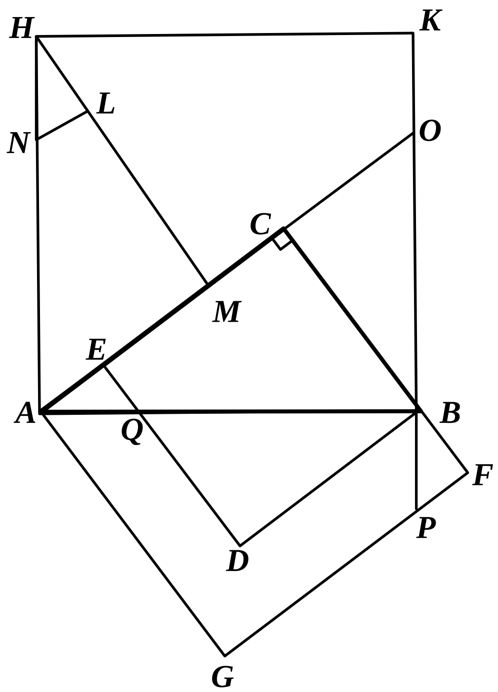
勾股定理證明-G157

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，正方形$ACFG$，以及正方形$ABKH$.
2. 過H點作垂直$\overline{AC}$的直線，交$\overline{AC}$於M點。
3. 直線AC與$\overline{KB}$相交於O點，連$\overline{CO}$.
4. 直線KB與$\overline{FG}$相交於P點，連$\overline{BP}$.
5. 作$\overline{HN}=\overline{BP}$，$\overline{HL}=\overline{BF}$，連$\overline{LN}$.
6. 直線AB與直線DE相交於Q點。



【求證過程】

分別以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$、正方形$ACFG$與正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形BCO與三角形BDQ全等：

在ΔBCO與ΔBDQ中，因為$\angle OBC+\angle CBA=\angle QBD+\angle CBA$，所以$\angle OBC=\angle QBD$，

又 $\angle OCB = 90^{\circ} = \angle BDQ$, $\overline{BC} = a = \overline{BD}$ ，可推得

$$\Delta BCO \cong \Delta BDQ \text{ (ASA).}$$

2. 證明三角形 AEQ 皆與三角形 BDQ 和三角形 BDQ 全等：

設 $\angle CAB = x^{\circ}$, $\angle CBA = y^{\circ}$。因為在 ΔHAM 中， $\angle HAM = y^{\circ} = \angle CBA$,

$\angle MHA = x^{\circ} = \angle CAB$, 且已知 $\overline{AH} = c = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta HAM \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等).}$$

又在 ΔBFP 與 ΔAEQ 中， $\angle FBP = \angle OBC = x^{\circ} = \angle EAQ$, $\angle BFP = 90^{\circ} = \angle AEQ$ 且

$\overline{BF} = b - a = \overline{AE}$ ，所以

$$\Delta BFP \cong \Delta AEQ \text{ (ASA 全等).}$$

在 ΔHLN 與 ΔBFP 中， $\angle LHN = x^{\circ} = \angle FBP$, $\overline{HN} = \overline{BP}$, $\overline{HL} = \overline{BF}$ ，所以

$$\Delta HLN \cong \Delta BFP \text{ (SAS 全等).}$$

故

$$\Delta AEQ \cong \Delta HLN \cong \Delta BFP.$$

3. 利用第 2 點證明四邊形 $EQBC$ 與四邊形 $NLMA$ 全等：
因為 $\Delta HAM \cong \Delta ABC$ 且 $\Delta AEQ \cong \Delta HLN$ ，所以

$$\text{四邊形}EQBC \cong \text{四邊形}NLMA.$$

4. 證明四邊形 $KHMO$ 與四邊形 $BAGP$ 全等：
在四邊形 $KHMO$ 與四邊形 $BAGP$ 中，因為 $\angle HKO = 90^{\circ} = \angle ABP$, $\angle KHM = y^{\circ} = \angle BAG$, $\angle HMO = 90^{\circ} = \angle AGP$ ，所以

$$\text{四邊形}KHMO\text{與四邊形}BAGP\text{的四個內角都對應相等。}$$

又 $\overline{HK} = c = \overline{AB}$, $\overline{HM} = b = \overline{AG}$ ，因此

$$\text{四邊形}KHMO \cong \text{四邊形}BAGP.\text{(註①)}$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta AEQ\text{面積} + \text{四邊形}EQBC\text{面積} + \Delta BCO\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}KHMO\text{面積} + \Delta HLN\text{面積} + \text{四邊形}NLMA\text{面積} \\
&= \Delta AEQ\text{面積} + \text{四邊形}EQBC\text{面積} + \Delta BDQ\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}BAGP\text{面積} + \text{四邊形}EQBC\text{面積} + \Delta BFP\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}EQBC\text{面積} + \Delta BDQ\text{面積}) + (AEQ\text{面積} \\
&\quad + \text{四邊形}EQBC\text{面積} + \text{四邊形}BAGP\text{面積} + \Delta BFP\text{面積}) \\
&= \text{正方形}CBDE + \text{正方形}ACFG\text{面積。}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

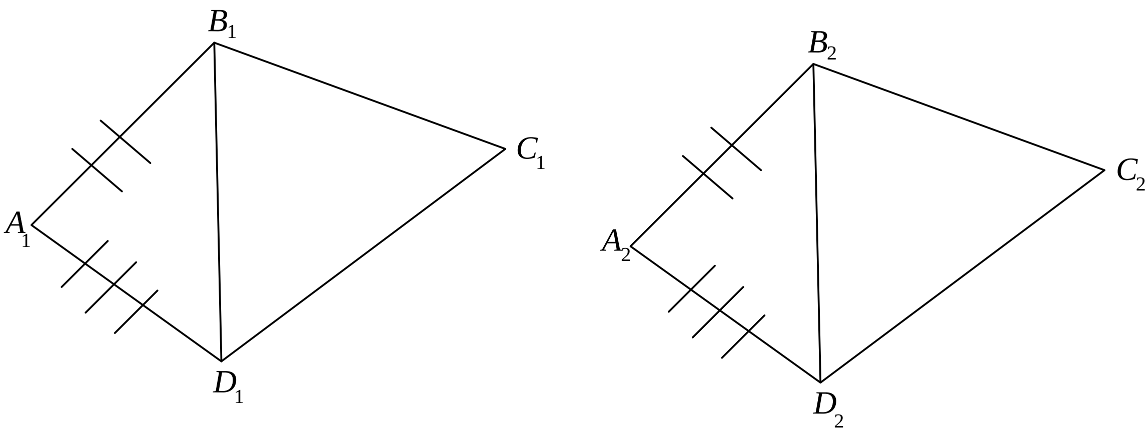
1. 來源： 根據魯米斯在《勾股定理》這本書中寫道，這個證明是 Richard A. Bell 在 1920 年 11 月 30 日想到的，並在 1938 年 2 月 28 日交給他。
2. 心得：此證明是將正方形 *ABKH* 切割成六個區塊，再利用圖形的全等關係，將六個區塊的面積轉換成正方形 *CBDE* 面積以及正方形 *ACFG* 的面積，最後推導出三個正方形的面積關係。此證明只要一一證明圖形之間的全等關係，就能順利推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：

(1) 註①：此部分要證明「若兩四邊形的四個內角對應相等且有兩鄰邊對應相等，則兩四邊形必全等。」

證明：



不失一般性假設 $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}$ 且 $\overline{A_1D_1}=\overline{A_2D_2}$ 。因為兩四邊形的四個內角對應相等，所以 $\angle B_1A_1D_1=\angle B_2A_2D_2$ ，且已知 $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}$ 且 $\overline{A_1D_1}=\overline{A_2D_2}$ ，可推得

$$\Delta B_1A_1D_1 \cong \Delta B_2A_2D_2 \text{ (SAS 全等).}$$

因為 $\Delta B_1A_1D_1 \cong \Delta B_2A_2D$ ，所以 $\overline{B_1D_1}=\overline{B_2D_2}$ 且 $\angle A_1B_1D_1=\angle A_2B_2D_2$, $\angle A_1D_1B_1=\angle A_2D_2B_2$ ，又因為兩四邊形的四個內角對應相等，所以 $\angle A_1B_1C_1=\angle A_2B_2C_2$, $\angle A_1D_1C_1=\angle A_2D_2C_2$ ，可推得

$$\angle C_1B_1D_1=\angle A_1B_1C_1-\angle A_1B_1D_1=\angle A_2B_2C_2-\angle A_2B_2D_2=\angle C_2B_2D_2$$

且

$$\angle C_1D_1B_1=\angle A_1D_1C_1-\angle A_1D_1B_1=\angle A_2D_2C_2-\angle A_2D_2B_2=\angle C_2D_2B_2,$$

又

$$\overline{B_1D_1}=\overline{B_2D_2},$$

因此

$$\Delta C_1B_1D_1 \cong \Delta C_2B_2D_2 \text{ (ASA 全等).}$$

因為兩四邊形的四個內角對應相等，所以 $\Delta C_1B_1D_1$ 與 $\Delta C_2B_2D_2$ 是無法翻轉的，故四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 與四邊形 $A_2B_2C_2D_2$ 必全等。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：