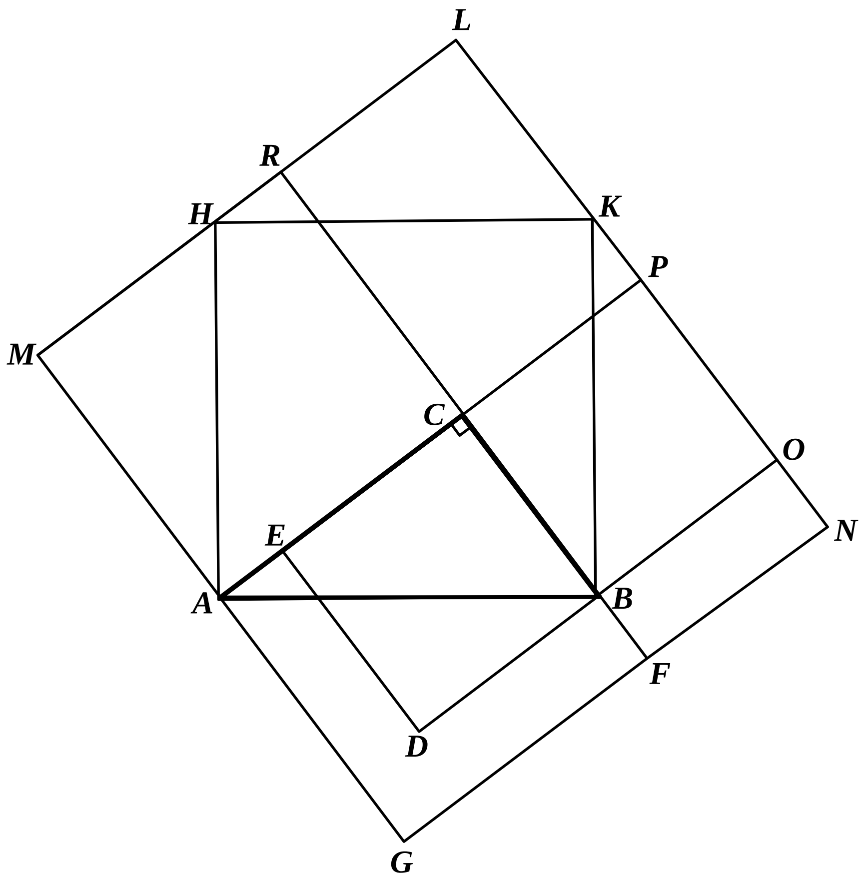
勾股定理證明-G156

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，正方形$ACFG$，以及正方形$ABKH$.
2. 延長$\overline{GA}$至M點，延長$\overline{GF}$至N點，使得$\overline{AM}=\overline{AG}$，$\overline{FN}=\overline{BC}$.
3. 直線MH與直線NK相交於L點，連$\overline{LH}$，$\overline{HM}$，$\overline{LK}$，$\overline{KN}$.
4. 直線DB與直線AC分別交$\overline{LN}$於O點，P點，連$\overline{BO}$，$\overline{CP}$.
5. 直線BC交$\overline{LM}$於R點，連$\overline{CR}$.



【求證過程】

分別以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$、正方形$ACFG$與正方形$ABKH$，並向外延伸作大長方形$GMLN$，正方形$ABKH$面積等於大長方形$GMLN$面積減去正方形$ABKH$外的四個三角形，並證明等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形 AMH 、三角形 KOB 與三角形 HLK 皆和三角形 ACB 全等：

因為 $\angle HAM + \angle HAC = 90^\circ = \angle CAB + \angle HAC$ ，所以 $\angle HAM = \angle CAB$ ，又

$\overline{AM} = \overline{AG} = \overline{AC} = b$, $\overline{AH} = \overline{AB} = c$ ，可推得

$$\Delta AMH \cong \Delta ACB \text{(SAS 全等)},$$

即 $\angle AMH = \angle ACB = 90^\circ$ ；同理可證

$$\Delta KOB \cong \Delta ACB \text{(SAS 全等)},$$

因為 $\angle LHK = \angle CAB$, $\angle LKH = \angle CBA$, $\overline{HK} = \overline{AB}$ ，所以

$$\Delta HLK \cong \Delta ACB \text{(ASA 全等)}.$$

2. 利用第 1 點證明四邊形 $GMLN$ 為長方形：

因為 $\Delta AMH \cong \Delta ACB$, $\Delta HLK \cong \Delta ACB$ ，所以 $\angle AMH = \angle ACB = 90^\circ$,

$\angle HLK = \angle ACB = 90^\circ$ 。因為 $\angle NGM = 90^\circ$, $\angle GML = \angle AMH = 90^\circ$,

$\angle MLN = \angle HLK = 90^\circ$ ，所以

$$\text{四邊形}GMLN\text{為長方形。}$$

3. 證明四邊形 $CBOP$ 為面積是 a^2 的正方形：

因為 $\Delta KOB \cong \Delta ACB$ ，所以 $\angle KOB = \angle ACB = 90^\circ$ ，又 $\angle PCB = 90^\circ$, $\angle OBC = 90^\circ$ ，可推得

$$\text{四邊形}CBOP\text{的四個內角都是直角。}$$

又因為 $\Delta KOB \cong \Delta ACB$ ，所以 $\overline{BO} = \overline{BC} = a$ ，故

$$\text{四邊形}CBOP\text{是面積為}a^2\text{的正方形。}$$

4. 證明長方形 $CPLR$ 面積等於兩倍的三角形 ACB 面積：

因為四邊形 $CPLR$ 的四個內角皆為 90° ，且 $\overline{CP} = a$, $\overline{PL} = \overline{AM} = b$ ，所以

$$\begin{aligned}\text{長方形}CPLR\text{面積} &= \overline{CP} \times \overline{PL} \\ &= a \times b \\ &= 2\Delta ACB\text{面積。}\end{aligned}$$

5. 證明梯形 $ACRH$ 面積等於梯形 $AGFB$ 面積：

因為四邊形 $ACRM$ 的四個內角皆為 90°，且 $\overline{AC}=\overline{AM}=b$，所以

$$\text{四邊形}ACRM\text{是面積為}b^2\text{的正方形。}$$

故

$$\begin{aligned}\text{梯形}ACRH\text{面積}&=\text{正方形}ACRM\text{面積}-\Delta AMH\text{面積}\\&=\text{正方形}ACFG\text{面積}-\Delta ACB\text{面積}\\&=\text{梯形}AGFB\text{面積。}\end{aligned}$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積}&=\text{長方形}GMLN\text{面積}-\text{長方形}BFNO\text{面積}-\Delta KBO\text{面積}\\&\quad-\Delta HLK\text{面積}-\Delta AMH\text{面積}-\text{梯形}AGFB\text{面積}\\&=\text{長方形}GMLN\text{面積}-\text{長方形}BFNO\text{面積}-2\Delta ACB\text{面積}\\&\quad-\Delta AMH\text{面積}-\text{梯形}ACRH\text{面積}\\&=\text{長方形}GMLN\text{面積}-\text{長方形}BFNO\text{面積}-\text{長方形}CPLR\text{面積}\\&\quad-\Delta AMH\text{面積}-\text{梯形}ACRH\text{面積}\\&=\text{正方形}CBOP+\text{正方形}ACFG\text{面積}\\&=\text{正方形}CBDE+\text{正方形}ACFG\text{面積。}\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 22). Leipz.: Friese.

2. 心得：此證明畫完輔助線之後，圖形形成一個大長方形，很有美感。此證明的方法是利用正方形 $ABKH$ 面積等於大長方形 $GMLN$ 面積減去正方形 $ABKH$ 外的其它圖形面積，最後得到了三個正方形的面積關係。此證明方法很直觀，很容易理解。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●