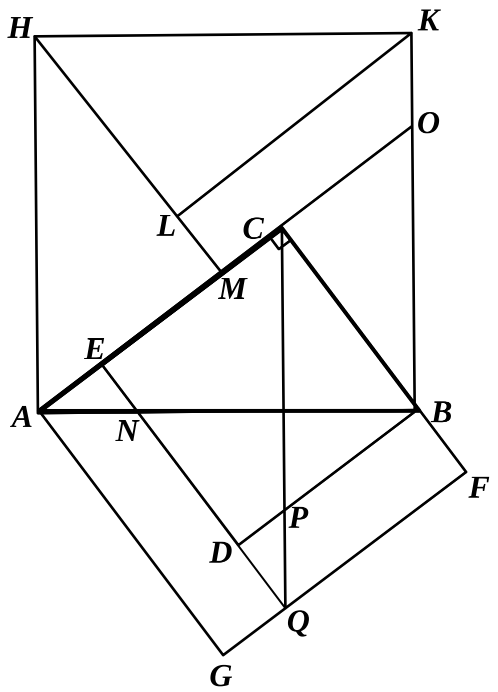
勾股定理證明-G155

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，正方形$ACFG$，以及正方形$ABKH$.
2. 過H點作垂直$\overline{AC}$的直線，交$\overline{AC}$於M點；過K點作垂直$\overline{HM}$的直線，交$\overline{HM}$於L點。
3. 直線AC與$\overline{KB}$相交於O點，連$\overline{CO}$.
4. 直線ED與$\overline{FG}$相交於Q點，連$\overline{DQ}$.
5. 連$\overline{CQ}$交$\overline{BD}$於P點。
6. $\overline{AB}$與$\overline{ED}$相交於N點。



【求證過程】

直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$面積所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形CQF、三角形HAM、三角形CQE與三角形KHL皆和三角形ABC全等：

在ΔCEQ中，因為$\overline{CE}=a$，$\overline{EQ}=\overline{ED}+\overline{DQ}=a+(b-a)=b$，$\angle CEQ=90^{\circ}$，所以

$$\Delta QCE \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

即 $\overline{CQ} = \overline{BA} = c$，又 $\overline{CF} = b$, $\angle CFQ = 90^\circ$，可推得

$$\Delta CQF \cong \Delta ABC \text{ (RHS 全等)}.$$

設 $\angle CAB = x^\circ$, $\angle CBA = y^\circ$。在 ΔHAM 中，因為 $\angle HAM = y^\circ = \angle CBA$,

$\angle MHA = x^\circ = \angle CAB$, 且已知 $\overline{AH} = c = \overline{AB}$，所以

$$\Delta HAM \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

同理可證

$$\Delta CQE \cong \Delta ABC \text{且} \Delta KHL \cong \Delta ABC.$$

故

$$\Delta CQF \cong \Delta HAM \cong \Delta CQE \cong \Delta KHL \cong \Delta ABC.$$

2. 證明三角形 BDN 與三角形 BCO 全等：

   在 ΔBDN 中，因為 $\angle NBD = \angle OBC$, $\angle BDN = \angle BCO = 90^\circ$, $\overline{BD} = \overline{BC} = a$，所以

$$\Delta BDN \cong \Delta BCO \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta ABC\text{面積} + \Delta BCO\text{面積} + \text{梯形}MOKL\text{面積} \\
&\quad + \Delta KHL\text{面積} + \Delta HAM\text{面積} \\
&= (\Delta ANE\text{面積} + \text{四邊形}ENBC\text{面積}) + \Delta BDN\text{面積} \\
&\quad + \text{梯形}QNAG\text{面積} + \Delta CQF\text{面積} + \Delta CQE\text{面積} \\
&= (\text{四邊形}ENBC\text{面積} + \Delta BDN\text{面積}) + (\Delta ANE\text{面積} + \\
&\quad + \text{梯形}QNAG\text{面積} + \Delta CQF\text{面積} + \Delta CQE\text{面積} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積} + \text{正方形}ACFG\text{面積}\text{。}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源： 根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1890 年 8 月 3 日想到的。
2. 心得：此證明先將正方形 $ABKH$ 切割成若干圖形，接著再利用全等關係與面積相等的關係，來證明這些圖形的面積恰好等於正方形 $CBDE$ 的面積加上正方形

$ACFG$的面積，只要按部就班地證明一些三角形的全等關係，就不難推導出最後的勾股定理關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：