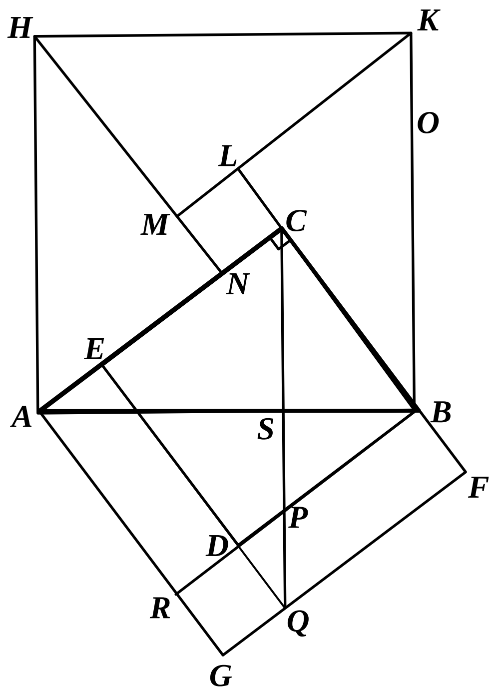
勾股定理證明-G154

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，正方形$ACFG$，以及正方形$ABKH$.
2. 過H點作垂直$\overline{AC}$的直線，交$\overline{AC}$於N點；過K作垂直$\overline{HN}$的直線，交$\overline{HN}$於M點。
3. 直線CF與直線MK相交於L點，連$\overline{CL}$.
4. 直線ED與FG相交於Q點，連$\overline{DQ}$.
5. 連$\overline{CQ}$分別交$\overline{AB}$，$\overline{BD}$於S點，P點。
6. 直線BD與直線AG相交於R點，連$\overline{DR}$.



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$面積所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形QCE、三角形CQF、三角形BAR、三角形HAN、三角形KHM與三角形BKL皆和三角形ABC全等：

在 ΔCEQ 中，因為 $\overline{CE}=a$, $\overline{EQ}=\overline{ED}+\overline{DQ}=a+(b-a)=b$, $\angle CEQ=90^{\circ}$，所以

$$\Delta QCE \cong \Delta ABC \text{ (SAS 全等)},$$

即 $\overline{CQ}=\overline{BA}=c$，又 $\overline{CF}=b$, $\angle CFQ=90^{\circ}$，因此

$$\Delta CQF \cong \Delta ABC \text{ (RHS 全等)}.$$

設 $\angle CAB=x^{\circ}$, $\angle CBA=y^{\circ}$。在 ΔBAR 中，因為 $\angle RBA=x^{\circ}$, $\angle RAB=y^{\circ}$，且已知

$\overline{AB}=c$，所以

$$\Delta BAR \cong \Delta ABC \text{ (ASA 全等)}.$$

同理可證

$$\Delta HAN \cong \Delta ABC,\ \Delta KHM \cong \Delta ABC,\ \Delta BKL \cong \Delta ABC,$$

故

$$\Delta QCE \cong \Delta CQF \cong \Delta BAR \cong \Delta HAN \cong \Delta KHM \cong \Delta BKL \cong \Delta ABC.$$

2. 證明四邊形 $CLMN$ 與四邊形 $DRGQ$ 都是面積為 $(b-a)^2$ 的正方形：

   因為四邊形 $CLMN$ 的四個角都是直角，且四條邊長皆為 $b-a$，所以

$$\text{四邊形}CLMN\text{是面積為}(b-a)^2\text{的正方形。}$$

   同理可得

$$\text{四邊形}DRGO\text{也是面積為}(b-a)^2\text{的正方形。}$$

3. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \Delta ABC\text{面積}+\Delta HAN\text{面積}+\Delta KHM\text{面積}\\
&\quad +\Delta BKL\text{面積}+\text{正方形}CLMN\text{面積}\\
&= \Delta ABC\text{面積}+\Delta QCE\text{面積}+\Delta CQF\text{面積}\\
&\quad +\Delta BAR\text{面積}+\text{正方形}DRGQ\text{面積}\\
&= \Delta ABC\text{面積}+(\text{梯形}CEDP\text{面積}+\Delta QPD\text{面積})+(\Delta PBC\text{面積}+\\
&\quad +\text{梯形}QFBP\text{面積})+\Delta BAR\text{面積}+\text{正方形}DRGQ\text{面積}\\
&= (\text{梯形}CEDP\text{面積}+\Delta PBC\text{面積})+(\Delta ABC\text{面積}+\Delta BAR\text{面積}\\
&\quad +\text{梯形}QFBP\text{面積}+\Delta QPD\text{面積}+\text{正方形}DRGQ\text{面積})\\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積。}
\end{aligned}$$

   得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.157). New York : Macmillan and co.

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 5*(3), 74.

2. 心得：此證明將正方形 *ABKH* 切割成四個三角形與一個小正方形，接著利用面積關係將四個三角形面積與一個小正方形面積轉換成兩個正方形面積，雖然過程中的面積轉換有點複雜，但是，只要一步驟一步驟慢慢地推導，不難推導出最後的勾股定理關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●