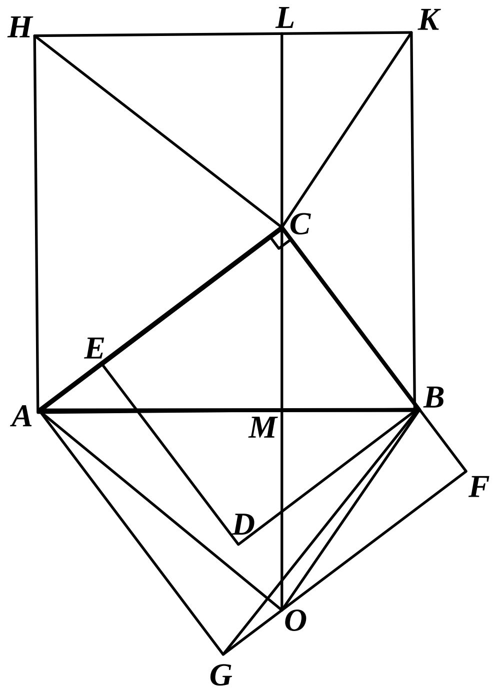
勾股定理證明-G153

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，正方形$ACFG$，以及正方形$ABKH$.
2. 過C點作與$\overline{AB}$垂直的直線，分別交$\overline{HK}$，$\overline{AB}$，$\overline{GF}$於L點，M點，O點。
3. 連$\overline{CH}$，$\overline{CK}$與連$\overline{OA}$，$\overline{OB}$.
4. 連$\overline{GB}$.



【求證過程】

分別以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$、正方形$ACFG$與正方形$ABKH$，正方形$ABKH$面積等於長方形$LKBM$的面積加上長方形$LHAM$的面積，證明長方形$LKBM$的面積等於正方形$CBDE$的面積，同時長方形$LHAM$的面積也與正方形$ACFG$的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形$KBOC$為平行四邊形：

在ΔCFO中，因為$\angle FCO+\angle ACM=90^{\circ}=\angle CAB+\angle ACM$，所以$\angle FCN=\angle CAB$，

又$\angle CFO=\angle ACB=90^{\circ}$，$\overline{CF}=\overline{CB}+\overline{BF}=a+(b-a)=b=\overline{AC}$，可推得

$$\Delta CFO \cong \Delta ACB \text{(ASA 全等)},$$

即 $\overline{FO}=\overline{CB}=a$, $\overline{CO}=\overline{AB}=c$。因為 $\overline{CO}\,//\,\overline{KB}$, $\overline{CO}=\overline{KB}=c$，所以

四邊形 $KBOC$ 為平行四邊形。

2. 證明三角形 BAG 與三角形 HAC 全等：

因為 $\angle BAG+\angle CAB=90^\circ=\angle HAC+\angle CAB$，所以 $\angle BAG=\angle HAC$，又 $\overline{AB}=\overline{AH}=c$ ，

$\overline{AG}=\overline{AC}=b$ ，故

$$\Delta BAG \cong \Delta HAC \text{(SAS 全等)}.$$

3. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{長方形}LKBM\text{面積}+\text{長方形}LHAM\text{面積}\\ &= \text{平行四邊形}KBOC\text{面積}+2\Delta HAC\text{面積}\\ &= 2\Delta OCB\text{面積}+2\Delta BAG\text{面積}\\ &= 2\times\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{FO}+2\times\frac{1}{2}\times\overline{AG}\times\overline{GF}\\ &= \overline{CB}\times\overline{FO}+\overline{AG}\times\overline{GF}\\ &= a^2+b^2,\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

J. Wipper (1880). *46 Beweise des pythagoraischen Lehrsatzes, nebst kurzen biogr. Mittheilgn uber Pythagoras* (p. 15). Leipz.: Friese.

Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 15). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明與 G150、G151、G152 類似，雖然中間的證明過程略有不同，不過都是將正方形 *ABKH* 面積先轉換成兩個長方形面積，再利用圖形的全等關係與面積相等關係，最後將長方形面積轉換成正方形面積，然後推導出勾股定理的關係式。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	