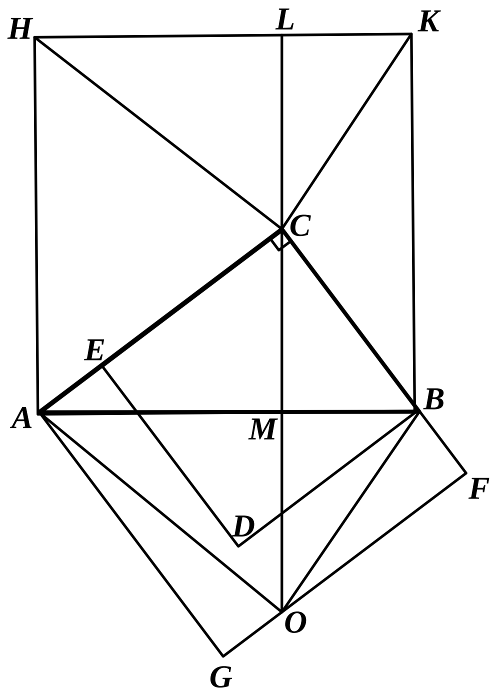
勾股定理證明-G152

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$ 為邊長向內作正方形 $CBDE$，正方形 $ACFG$，以及正方形 $ABKH$.
2. 過 C 點作與 $\overline{AB}$ 垂直的直線，分別交 $\overline{HK}$，$\overline{AB}$，$\overline{GF}$ 於 L 點，M 點，O 點。
3. 連 $\overline{CH}$，$\overline{CK}$ 與連 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$.



【求證過程】

分別以直角三角形 ABC 的三邊向內作正方形 $CBDE$、正方形 $ACFG$ 與正方形 $ABKH$，正方形 $ABKH$ 面積等於長方形 $LKBM$ 的面積加上長方形 $LHAM$ 的面積，證明長方形 $LKBM$ 的面積等於正方形 $CBDE$ 的面積，同時長方形 $LHAM$ 的面積也與正方形 $ACFG$ 的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形 $KBOC$ 與四邊形 $COAH$ 皆為平行四邊形：

在 ΔCFO 中，因為 $\angle FCO+\angle ACM=90^\circ=\angle CAB+\angle ACM$，所以 $\angle FCN=\angle CAB$，

又 $\angle CFO=\angle ACB$，$\overline{CF}=\overline{CB}+\overline{BF}=a+(b-a)=b=\overline{AC}$，可推得

$$\Delta CFO\cong\Delta ACB\,(\text{ASA 全等}),$$

即 $\overline{FO}=a$，$\overline{CO}=c$。因為 $\overline{CO}\,//\,\overline{KB}$ 且 $\overline{CO}=\overline{KB}=c$，所以

四邊形$KBOC$為平行四邊形。

因為$\overline{CO} // \overline{HA}$且$\overline{CO} = \overline{HA} = c$，所以

四邊形$COAH$為平行四邊形。

2. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{長方形}LKBM\text{面積} + \text{長方形}LHAM\text{面積} \\
&= \text{平行四邊形}KBOC\text{面積} + \text{平行四邊形}COAH\text{面積} \\
&= 2\Delta OCB\text{面積} + 2\Delta OCA\text{面積} \\
&= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{CB} \times \overline{FO} + 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{CA} \times \overline{AG} \\
&= \overline{CB} \times \overline{FO} + \overline{CA} \times \overline{AG} \\
&= a^2 + b^2,
\end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

George C. Edwards (1896). *Elements of geometry* (p. 160). New York: Macmillan.

Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 5*(3), 74.

2. 心得：此證明與 G150、G151 類似，都是將正方形 $ABKH$ 面積轉換成兩個長方形面積，再利用圖形的全等關係與面積相等關係，最後將長方形面積轉換成正方形面積，然後推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	