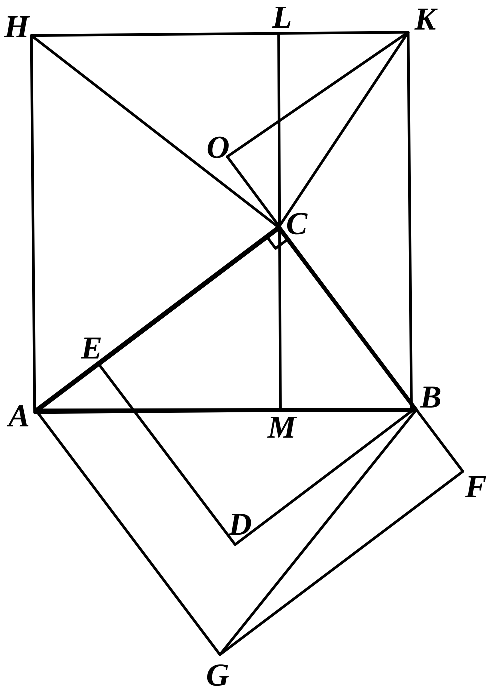
勾股定理證明-G151

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，正方形$ACFG$，以及正方形$ABKH$.
2. 過C點作與$\overline{AB}$垂直的直線，分別交$\overline{HK}$，$\overline{AB}$於L點，M點。
3. 延伸$\overrightarrow{FC}$至O點使得$\overline{BO}=\overline{FC}$.
4. 連$\overline{BG}$.



【求證過程】

分別以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$、正方形$ACFG$與正方形$ABKH$，正方形$ABKH$面積等於長方形$LKBM$的面積加上長方形$LHAM$的面積，證明長方形$LKBM$的面積等於正方形$CBDE$的面積，同時長方形$LHAM$的面積也與正方形$ACFG$的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形KBO與三角形BAC全等：

   因為$\angle KBO+\angle CBA=90^\circ=\angle BAC+\angle CBA$，所以$\angle KBO=\angle BAC$，又$\overline{BO}=\overline{FC}=\overline{AC}$，

   $\overline{BK}=\overline{AB}$，故

$$\Delta KBO \cong \Delta BAC \text{ (SAS 全等)}.$$

2. 證明ΔKCB面積等於$\frac{1}{2}a^2$：

   因為$\Delta KBO \cong \Delta BAC$，所以$\angle KOB = \angle BCA = 90^\circ$, $\overline{KO} = \overline{BC} = a$，故

$$\begin{aligned}\Delta KCB\text{面積} &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{KO} \\ &= \frac{1}{2} \times a \times a \\ &= \frac{1}{2}a^2.\end{aligned}$$

3. 證明三角形BAG與三角形HAC全等：

   因為$\angle BAG + \angle CAB = 90^\circ = \angle HAC + \angle CAB$，所以$\angle BAG = \angle HAC$，又$\overline{AB} = \overline{AH} = c$，

   $\overline{AG} = \overline{AC} = b$，故

$$\Delta BAG \cong \Delta HAC \text{ (SAS 全等)}.$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{長方形}LKBM\text{面積} + \text{長方形}LHAM\text{面積} \\ &= 2\Delta KCB\text{面積} + 2\Delta HAC\text{面積} \\ &= 2\Delta KCB\text{面積} + 2\Delta BAG\text{面積} \\ &= 2 \times \frac{1}{2}a^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{GF} \\ &= a^2 + b^2,\end{aligned}$$

   即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊與書籍：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly, 5*(3), 78.
   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 71). Paris: Vuibert et Nony.
2. 心得：此證明與 G150 類似，都是將正方形 $ABKH$ 面積轉換成兩個長方形面積，再利用全等關係與面積相等關係，將長方形面積轉換成正方形面積，進而推導出勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	