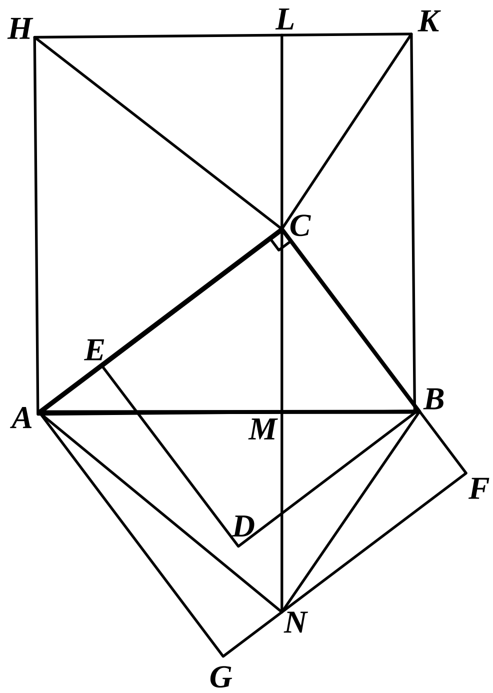
勾股定理證明-G150

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$為邊長向內作正方形$CBDE$，正方形$ACFG$，以及正方形$ABKH$.
2. 過C點作與$\overline{AB}$垂直的直線，分別交$\overline{HK}$，$\overline{AB}$，$\overline{GF}$於L點，M點，N點。
3. 連$\overline{CH}$，$\overline{CK}$與連$\overline{NA}$，$\overline{NB}$.



【求證過程】

分別以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$、正方形$ACFG$與正方形$ABKH$，正方形$ABKH$面積等於長方形$LKBM$的面積加上長方形$LHAM$的面積，證明長方形$LKBM$的面積等於正方形$CBDE$的面積，同時長方形$LHAM$的面積也與正方形$ACFG$的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明四邊形$KBNC$與四邊形$CNAH$皆為平行四邊形：

在ΔCFN中，因為$\angle FCN+\angle ACM=90^\circ=\angle CAB+\angle ACM$，所以$\angle FCN=\angle CAB$，

又$\angle CFN=\angle ACB$，$\overline{CF}=\overline{CB}+\overline{BF}=a+(b-a)=b=\overline{AC}$，可推得

$$\Delta CFN\cong\Delta ACB\,(\text{ASA 全等}),$$

即$\overline{CN}=c$。因為$\overline{CN}\,//\,\overline{KB}$，$\overline{CN}=\overline{KB}=c$，所以

四邊形$KBNC$為平行四邊形。

因為$\overline{CN} \,//\, \overline{HA}$，$\overline{CN} = \overline{HA} = c$，所以

四邊形$CNAH$為平行四邊形。

2. 證明三角形KCB面積等於$\frac{1}{2}a^2$且三角形NCA面積等於$\frac{1}{2}b^2$：

在ΔACB中，由母子相似性質知$\overline{MB} \times \overline{AB} = \overline{CB}^2$，$\overline{MA} \times \overline{AB} = \overline{CA}^2$，即$\overline{MB} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{AB}} = \frac{a^2}{c}$，

$\overline{MA} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{AB}} = \frac{b^2}{c}$，因此

$$\begin{aligned} \Delta KCB\text{面積} &= \frac{1}{2} \times \overline{KB} \times \overline{MB} \\ &= \frac{1}{2} \times c \times \frac{a^2}{c} \\ &= \frac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \Delta NCA\text{面積} &= \frac{1}{2} \times \overline{CN} \times \overline{MA} \\ &= \frac{1}{2} \times c \times \frac{b^2}{c} \\ &= \frac{1}{2}b^2. \end{aligned}$$

3. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned} \text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{長方形}LKBM\text{面積} + \text{長方形}LHAM\text{面積} \\ &= \text{平行四邊形}KBNC\text{面積} + \text{平行四邊形}CNAH\text{面積} \\ &= 2\Delta KCB\text{面積} + 2\Delta NCA\text{面積} \\ &= 2 \times \frac{1}{2}a^2 + 2 \times \frac{1}{2}b^2 \\ &= a^2 + b^2, \end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

J. M. Richardson(1859). Note on the forty-seventh proposition of Euclid, *Mathematical Monthly*, *2*(2), 15.

2. 心得：此證明先將正方形 *ABKH* 面積轉換成兩個長方形面積，再分別轉換成平行四邊形面積，然後再分別轉換成兩個三角形面積，最後都轉換成正方形面積。此證明利用面積相等的關係，一步驟一步驟慢慢地推導，最後就能得到勾股定理的關係式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	