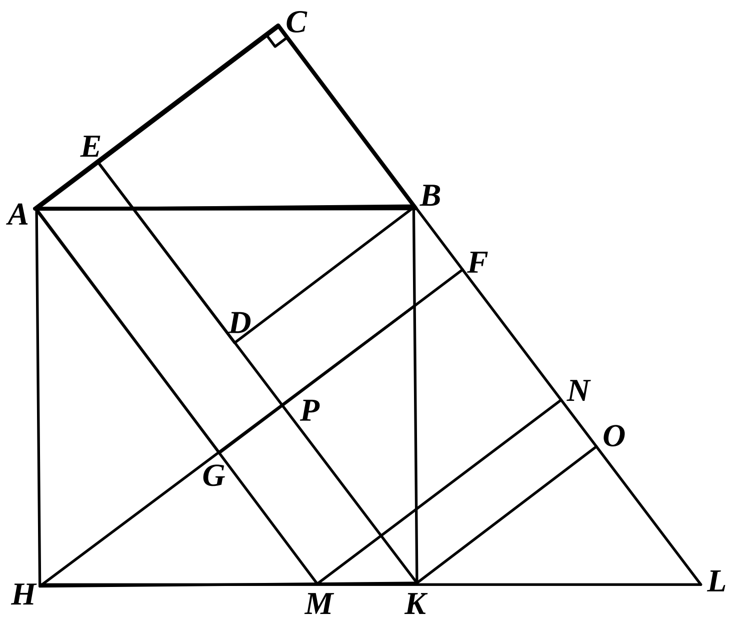
# 勾股定理證明-G149

## 【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$CBDE$和正方形$ACFG$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.
2. $\overleftrightarrow{CF}$，$\overleftrightarrow{HK}$相交於$L$點，連$\overline{FL}$，$\overline{KL}$.
3. 連$\overline{GH}$，$\overleftrightarrow{AG}$交$\overline{HK}$於$M$點，連$\overline{DK}$交$\overline{FH}$於$P$點。
4. 過$K$點作平行$\overline{AC}$的直線，交$\overline{FL}$於$O$點；過$M$點作平行$\overline{AC}$的直線，交$\overline{FL}$於$N$點。




## 【求證過程】

以直角三角形$ABC$的三邊向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，向外作正方形$ABKH$，正方形$ABKH$面積等於平行四邊形$ABLM$面積，證明平行四邊形$ABLM$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明$F-G-H$共線與$E-D-K$共線：

因為$\angle HAG+\angle GAB=90^\circ=\angle HAG+\angle BAC$，所以$\angle HAG=\angle CAB$，又$\overline{AG}=\overline{AC}=b$，

$\overline{AH}=\overline{AB}=c$，可推得

$$\Delta AGH\cong\Delta ACB\,(\text{SAS 全等}),$$

即 $\angle AGH = 90^{\circ}$，因此

$$F - G - H \text{共線。}$$

同理可證

$$E - D - K \text{共線。}$$

2. 證明三角形 $MLN$ 與三角形 $ABC$ 全等：

因為 $\overline{MN} = \overline{AC}$, $\overline{ML} = \overline{AB}$, $\angle C = \angle MNL = 90^{\circ}$，所以

$$\Delta MLN \cong \Delta ABC \text{ (RHS 全等).}$$

3. 證明長方形 $GFNM$ 面積等於 $a^2$：

$\Delta AHM$ 中，由母子相似性質知 $\overline{HG}^2 = \overline{AG} \times \overline{GM}$，即 $\overline{GM} = \dfrac{\overline{HG}^2}{\overline{AG}} = \dfrac{a^2}{b}$，因此

$$\begin{aligned} \text{長方形}GFNM\text{面積} &= \overline{FG} \times \overline{GM} \\ &= b \times \frac{a^2}{b} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

4. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned} \text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{梯形}AGFB\text{面積} + \Delta MLN\text{面積} + \text{長方形}GFNM\text{面積} \\ &= \text{梯形}AGFB\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} + a^2 \\ &= \text{正方形}ACFG\text{面積} + a^2 \\ &= b^2 + a^2, \end{aligned}$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

**【註與心得】**

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1876). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 58). Amsterdam: A.Versluys.

2. 心得：此證明先將正方形 $ABKH$ 面積轉換成平行四邊形 $ABLM$ 面積，再利用三角形全等關係以及圖形的面積相等關係，最後得到了勾股定理的關係式。在證明長方形 $GFNM$ 的面積等於 $a^2$ 的部分比較困難些，其它部分就比較容易理解。

3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ● |  | ● | ● | ● |