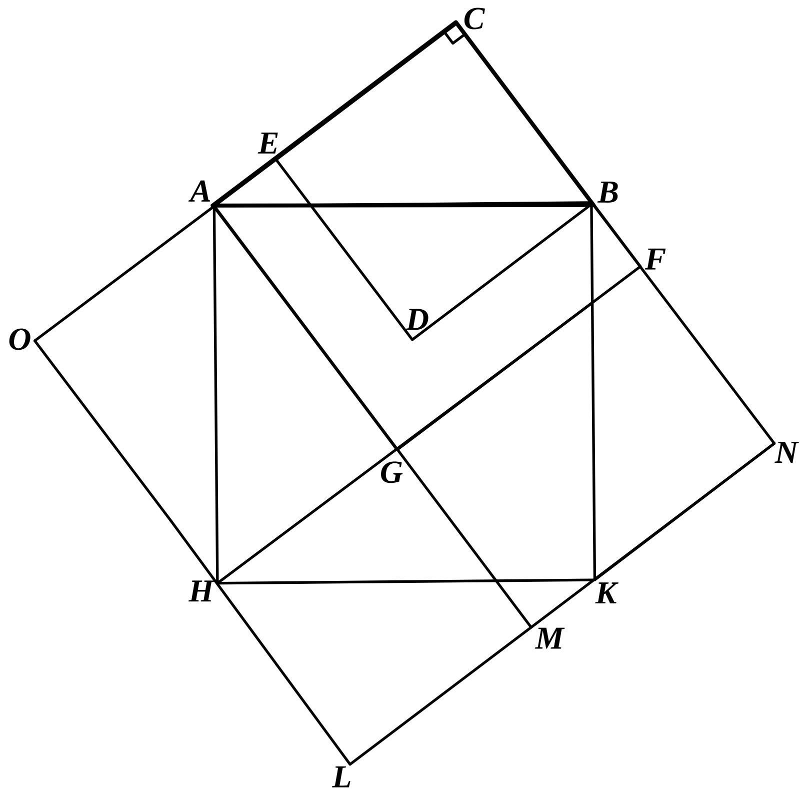
勾股定理證明-G148

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$CBDE$和正方形$ACFG$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.
2. 延長$\overrightarrow{CA}$至O點，延長$\overrightarrow{CB}$至N點，使得$\overline{AO}=\overline{CB}=a$，$\overline{FN}=\overline{CB}=a$.
3. 設$\overleftrightarrow{OH}$，$\overleftrightarrow{NK}$相交於L點，連$\overline{NK}$，$\overline{KL}$，$\overline{OH}$，$\overline{HL}$.
4. 設$\overleftrightarrow{AG}$交$\overline{KL}$於M點，連$\overline{GM}$.
5. 連$\overline{GH}$，$\overline{DK}$.



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，向外作正方形$ABKH$，並向外延伸作大正方形$CNLO$，正方形$ABKH$面積等於大正方形$CNLO$面積減去正方形$ABKH$外的四個三角形面積，並證明等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明$F-G-H$共線共線：

因為$\angle HAG+\angle GAB=90^{\circ}=\angle HAG+\angle BAC$，所以$\angle HAG=\angle CAB$，又$\overline{AG}=\overline{AC}=b$,

$\overline{AH}=\overline{AB}=c$，可推得

$$\Delta AGH\cong\Delta ACB\,(\text{SAS 全等}),$$

即$\angle AOH=90^{\circ}$，故

$$F-G-H\text{共線。}$$

2. 證明三角形AOH與三角形BNK皆和三角形ACB全等且四邊形$CNLO$為正方形：

因為$\angle OAH+\angle CAB=90^{\circ}=\angle CBA+\angle CAB$，所以$\angle OAH=\angle CBA$，又$\overline{OA}=\overline{CB}=a$,

$\overline{AH}=\overline{AB}=c$，可推得

$$\Delta AOH\cong\Delta ACB\,(\text{SAS 全等}),$$

即$\angle AGH=90^{\circ}$。同理可證

$$\Delta BNK\cong\Delta ACB\,(\text{SAS 全等}),$$

即$\angle BNK=90^{\circ}$。又因為$\overline{CO}=\overline{CA}+\overline{AO}=b+a=\overline{CN}$，

故

$$\text{四邊形}CNLO\text{為正方形。}$$

3. 證明三角形KLH與三角形ACB全等：

因為$\Delta BNK\cong\Delta ACB$，所以$\angle BKN=\angle ABC$，可推得

$\angle LKH=90^{\circ}-\angle BKN=90^{\circ}-\angle ABC=\angle CAB$，又因為四邊形$CNLO$為正方形，所以

$\angle KLH=90^{\circ}=\angle ACB$，又$\overline{KH}=\overline{AB}$，故

$$\Delta KLH\cong\Delta ACB\,(\text{AAS 全等}).$$

4. 證明四邊形$AGHO$是面積為ab的長方形：

因為$\Delta AGH\cong\Delta ACB$，所以$\angle AGH=\angle ACB=90^{\circ},\ \angle GAH=\angle CAB$，又因為

$\Delta AOH\cong\Delta ACB$，所以$\angle HOA=\angle ACB=90^{\circ},\ \angle OAH=\angle CBA$，又

$\angle GAH+\angle OAH=\angle CAB+\angle CBA=90^{\circ}$。因此

$$\text{四邊形}AGHO\text{的四個內角都是直角。}$$

又因為$\overline{AG}=b,\ \overline{AO}=a$，所以

$$\text{四邊形}AGHO\text{是面積為}ab\text{的長方形。}$$

5. 證明四邊形 $FNMG$ 是面積為 ab 的長方形：

因為 $\Delta BNK \cong \Delta ACB$，所以 $\angle BNK = \angle ACB = 90^{\circ}$，又 $\angle GFN = 90^{\circ}$, $\angle MGF = 90^{\circ}$，可推得

$$\text{四邊形}FNMG\text{的四個內角都是直角。}$$

又因為 $\overline{GF} = b$, $\overline{FN} = a$，所以

$$\text{四邊形}FNMG\text{是面積為}ab\text{的長方形。}$$

6. 證明四邊形 $GMLH$ 是面積為 a^2 為的正方形：

因為 $\Delta KLH \cong \Delta ACB$，所以 $\angle KLH = \angle ACB = 90^{\circ}$，又因為四邊形 $AGHO$ 與四邊形 $FNMG$ 都是長方形，所以

$$\text{四邊形}GMHL\text{的四個內角都是直角。}$$

又因為 $\overline{GH} = \overline{AO} = a$, $\overline{GM} = \overline{FN} = a$，所以

$$\text{四邊形}GMLH\text{是面積為}a^2\text{的正方形。}$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{正方形}CNLO\text{面積} - \Delta ACB\text{面積} - \Delta AOH\text{面積} \\
&\quad - \Delta KLH\text{面積} - \Delta BNK\text{面積} \\
&= \text{正方形}CNLO\text{面積} - 4\Delta ACB\text{面積} \\
&= \text{正方形}CNLO\text{面積} - 2\text{長方形}AGHO\text{面積} \\
&= \text{正方形}CNLO\text{面積} - \text{長方形}AGHO\text{面積} - \text{長方形}FNMG\text{面積} \\
&= \text{正方形}ACFG\text{面積} + \text{正方形}GMLH\text{面積} \\
&= b^2 + a^2 \\
&= \text{正方形}ACFG\text{面積} + \text{正方形}CBDE\text{面積。}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1876). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 52). Amsterdam: A.Versluys.

2. 心得：此證明畫完輔助線之後，圖形形成一個大正方形，相當有美感。此外，證明的方法是利用正方形 *ABKH* 面積等於大正方形 *CNLO* 面積減去正方形 *ABKH* 外的四個三角形面積，最後得到了三個正方形的面積關係，證明方法很直觀，容易理解。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●		●	●