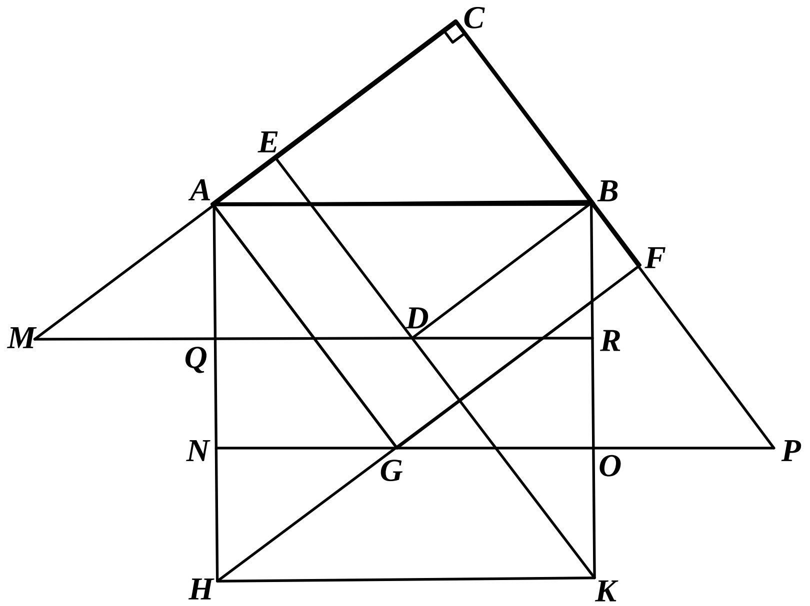
勾股定理證明-G147

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$CBDE$和正方形$ACFG$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.
2. 作過G點且平行$\overline{AB}$的直線，交$\overline{AH}$於N點且交$\overline{BK}$於O點。
3. $\overleftrightarrow{BF}$與$\overleftrightarrow{NO}$相交於P點，連$\overline{FP}$，$\overline{OP}$.
4. 作過D點且平行$\overline{AB}$的直線，交$\overline{AH}$於Q點，交$\overline{BK}$於R點。
5. $\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{RQ}$相交於M點，連$\overline{AM}$，$\overline{QM}$.
6. 連$\overline{GH}$，$\overline{DK}$.



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，向外作正方形$ABKH$，正方形$ABKH$面積等於長方形$NOKH$的面積加上長方形$ABON$的面積，證明長方形$NOKH$的面積等於正方形$CBDE$的面積，同時長方形$ABON$的面積也與正方形$ACFG$的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明矩形$NOKH$面積等於矩形$ABRQ$面積：

因為$\angle HAG+\angle GAB=90^{\circ}=\angle HAG+\angle BAC$，所以$\angle HAG=\angle CAB$，又$\overline{AG}=\overline{AC}=b$，

$\overline{AH}=\overline{AB}=c$，可推得

$$\Delta AGH\cong\Delta ACB\,(\text{SAS 全等}),$$

即$\angle AGH=90^\circ$。同理可證

$$\Delta KDB\cong\Delta ACB\,(\text{SAS 全等}),$$

即$\angle KDB=90^\circ$. ΔAGH 中，由母子相似性質知：$\overline{HN}\times\overline{HA}=\overline{GH}^2$，即

$\overline{HN}=\dfrac{\overline{GH}^2}{\overline{HA}}=\dfrac{a^2}{c}$; ΔKDB 中，由母子相似性質知：$\overline{BR}\times\overline{BK}=\overline{BD}^2$，即

$\overline{BR}=\dfrac{\overline{BD}^2}{\overline{BK}}=\dfrac{a^2}{c}$，綜合以上可得

$$\overline{BR}=\overline{HN}.$$

故

$$\begin{aligned}\text{長方形}NOKH\text{面積}&=\overline{HN}\times\overline{NO}\\&=\overline{BR}\times\overline{AB}\\&=\text{長方形}ABRQ\text{面積。}\end{aligned}$$

2. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積}&=\text{長方形}ABON\text{面積}+\text{長方形}NOKH\text{面積}\\&=\text{長方形}ABON\text{面積}+\text{長方形}ABRQ\text{面積}\\&=\text{平行四邊形}ABDM\text{面積}+\text{平行四邊形}ABPG\text{面積}\\&=\overline{DB}\times\overline{BC}+\overline{GA}\times\overline{AC}\\&=\text{正方形}CBDE\text{面積}+\text{正方形}ACFG\text{面積。}\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

Versluys, J. (1876). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 28). Amsterdam: A.Versluys.

2. 心得：此證明與 G144 類似，G144 的證明先將正方形 *ABKH* 面積轉換成兩個長方形

面積，再分別轉換成兩個三角形面積，最後都轉換成正方形面積；此證明也是先將正方形 *ABKH* 面積轉換成兩個長方形面積，但是接下來是分別轉換成平行四邊形面積，最後同樣地都轉換成正方形面積，證明方式只有中間有些微差異，不過兩種證明方式都不難理解。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	