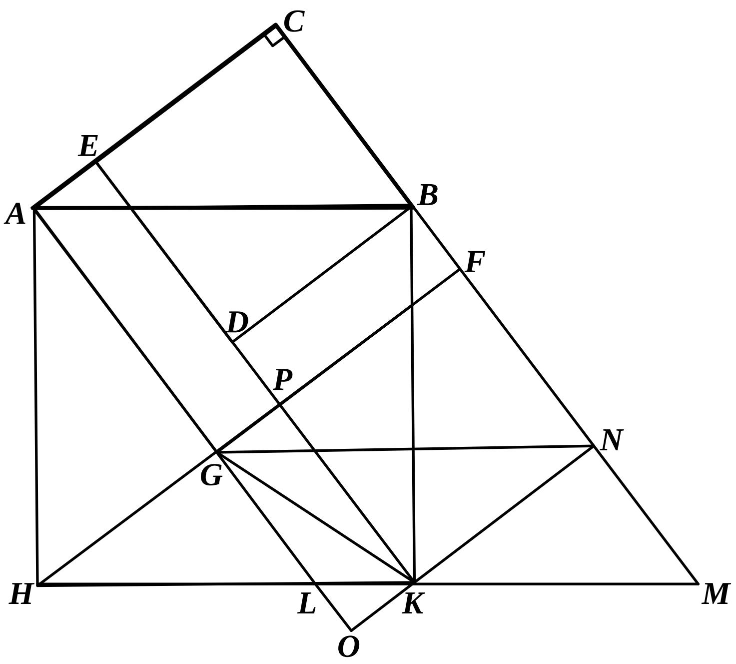
勾股定理證明-G146

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$CBDE$和正方形$ACFG$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.
2. 設$\overleftrightarrow{CF}$，$\overleftrightarrow{HK}$相交於M點，連$\overline{FM}$，$\overline{KM}$.
3. 連$\overline{GH}$，$\overline{DK}$，設$\overline{DK}$交$\overline{FG}$於P點。
4. 延長$\overrightarrow{AG}$至O點使得$\overline{GO}=\overline{CB}=a$且$\overline{GO}$交$\overline{HK}$於$L$點。
5. 過K點作垂直$\overline{FM}$的直線交$\overline{FM}$於N點，連$\overline{OK}$，$\overline{KN}$.
6. 連$\overline{GN}$，$\overline{GK}$.



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，向外作正方形$ABKH$，正方形$ABKH$面積等於平行四邊形$ABNG$面積加上平行四邊形$GNML$面積，平行四邊形$GNML$的面積等於正方形$CBDE$的面積，同時平行四邊形$ABNG$的面積等於正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形AGH與三角形ACB全等進而推得$F-G-H$共線：

因為$\angle HAG+\angle GAB=90^{\circ}=\angle HAG+\angle BAC$，所以$\angle HAG=\angle CAB$，又$\overline{AG}=\overline{AC}=b$

$\overline{AH}=\overline{AB}=c$，可推得

$$\Delta AGH\cong\Delta ACB(\text{SAS 全等}),$$

即$\angle AGH=\angle ACB=90^{\circ}$，故

$$F-G-H\text{共線。}$$

2. 證明三角形KDB與三角形ACB全等進而推得$E-D-K$共線：

因為$\angle KBD+\angle ABD=90^{\circ}=\angle CBA+\angle ABD$，所以$\angle KBD=\angle CBA$，又$\overline{BD}=\overline{BC}=a$

$\overline{BK}=\overline{BA}=c$，可推得

$$\Delta KDB\cong\Delta ACB(\text{SAS 全等}),$$

即$\angle KDB=\angle ACB=90^{\circ}$，故

$$E-D-K\text{共線。}$$

3. 證明$N-K-O$共線：

因為$\Delta AGH\cong\Delta ACB$，所以$\overline{GH}=\overline{CB}=a$, $\overline{PH}=\overline{PG}+\overline{GH}=(b-a)+a=b$，可推得

$$\overline{PK}=\sqrt{\overline{HK}^{2}-\overline{PH}^{2}}=\sqrt{c^{2}-b^{2}}=a,$$

又$\overline{PK}//\overline{GO}$且$\overline{PK}=\overline{GO}=a$，可推得

$$\text{四邊形}PKOG\text{為平行四邊形。}$$

因為$\angle PKO=\angle PGO=90^{\circ}$, $\angle PKN=360^{\circ}-90^{\circ}-90^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$，所以

$$N-K-O\text{共線。}$$

4. 證明三角形GNF與三角形ABC全等：

因為$\overline{GF}=\overline{AC}$, $\overline{FN}=\overline{PK}=a=\overline{CB}$, $\angle GFN=\angle C=90^{\circ}$，所以

$$\Delta GNF\cong\Delta ABC\,(\text{SAS 全等}).$$

5. 證明四邊形$GNML$為平行四邊形且面積等於正方形$CBDE$面積：

因為$\overline{BN}//\overline{AG}$且$\overline{BN}=\overline{BF}+\overline{FN}=(b-a)+a=b=\overline{AG}$，所以

$$\text{四邊形}ABNG\text{為平行四邊形。}$$

又因為$\overline{GN}//\overline{LM}$且$\overline{GL}//\overline{NM}$，所以

四邊形$GNML$亦為平行四邊形。

故

$$
\begin{aligned}
\text{平行四邊形}GNML\text{面積} &= 2\Delta GNK \\
&= 2\times\frac{1}{2}\times\overline{NK}\times\overline{OG} \\
&= \overline{KN}\times\overline{GO} \\
&= \overline{DB}\times\overline{BC} \\
&= \text{正方形}CBDE\text{面積。}
\end{aligned}
$$

6. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$
\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{平行四邊形}ABNG\text{面積}+\text{平行四邊形}GNML\text{面積} \\
&= \text{梯形}AGFB\text{面積}+\Delta GNF\text{面積}+\text{正方形}CBDE\text{面積} \\
&= \text{梯形}AGFB\text{面積}+\Delta ABC\text{面積}+\text{正方形}CBDE\text{面積} \\
&= \text{正方形}ACFG\text{面積}+\text{正方形}CBDE\text{面積。}
\end{aligned}
$$

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：根據魯米斯(E.S. Loomis) 在他的著作《勾股定理》中說：這個證明是他在 1926 年 3 月 14 日想到的。
2. 心得：此證明必須先確認$F-G-H$共線以及$E-D-K$共線，再將正方形$ABKH$面積轉換成平行四邊形$ABML$面積，再利用圖形的全等關係以及面積相等關係，最後就能推導出三個正方形的面積關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
	●		●	