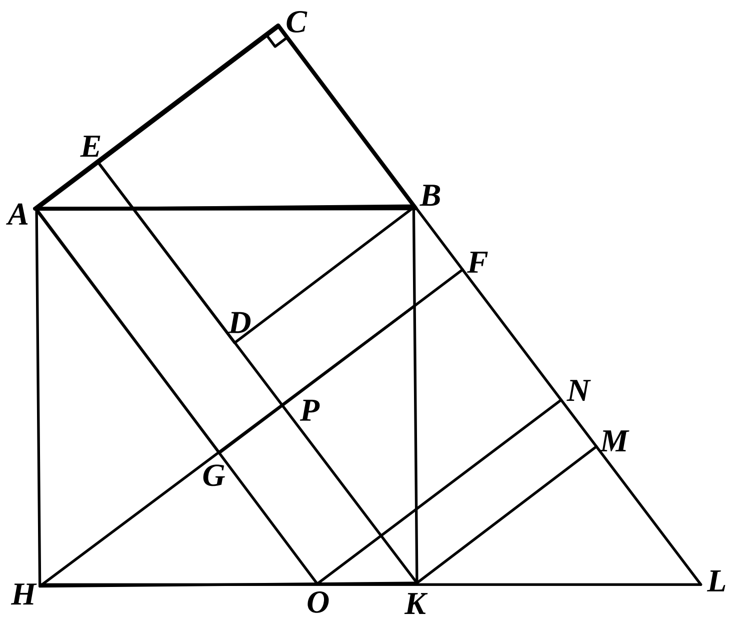
勾股定理證明-G145

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$CBDE$和正方形$ACFG$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$.
2. 設$\overleftrightarrow{CF}$，$\overleftrightarrow{HK}$相交於L點，連$\overline{FL}$，$\overline{KL}$.
3. 連$\overline{GH}$，$\overleftrightarrow{AG}$交$\overline{HK}$於O點，連$\overline{DK}$交$\overline{FH}$於P點。
4. 過K點作平行$\overline{AC}$的直線，交$\overline{FL}$於M點；過O點作平行$\overline{AC}$的直線，交$\overline{FL}$於N點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，向外作正方形$ABKH$，正方形$ABKH$面積等於平行四邊形$ABLO$面積，證明平行四邊形$ABLO$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形AGH與三角形ACB全等進而推得$F-G-H$共線：

因為$\angle HAG+\angle GAB=90^{\circ}=\angle HAG+\angle BAC$，所以$\angle HAG=\angle CAB$，又$\overline{AG}=\overline{AC}=b$，

$\overline{AH}=\overline{AB}=c$，可推得

$$\Delta AGH\cong\Delta ACB(\text{SAS 全等}),$$

即$\angle AGH = 90^{\circ}$，故

$$F-G-H\text{共線。}$$

2. 證明三角形KDB與三角形ACB全等進而推得$E-D-K$共線：

因為$\angle KBD + \angle ABD = 90^{\circ} = \angle CBA + \angle ABD$，所以$\angle KBD = \angle CBA$，又$\overline{BD} = \overline{BC} = a$

$\overline{BK} = \overline{BA} = c$，可推得

$$\Delta KDB \cong \Delta ACB \text{(SAS 全等)},$$

即$\angle KDB = \angle ACB = 90^{\circ}$，故

$$E-D-K\text{共線。}$$

3. 證明三角形OLN與三角形ABC全等：

因為$\overline{ON} = \overline{AC}$, $\overline{OL} = \overline{AB}$, $\angle C = \angle ONL = 90^{\circ}$，所以

$$\Delta OLN \cong \Delta ABC \text{(RHS 全等)}.$$

4. 證明長方形$GFNO$面積等於正方形$PFMK$面積：

設$\angle FHL = x^{\circ}$, $\angle FLH = y^{\circ}$，則$\angle PHK = \angle NOL = x^{\circ}$, $\angle NLO = \angle PKH = y^{\circ}$，又

$\overline{HK} = \overline{OL} = c$，可推得

$$\Delta HPK \cong \Delta ONL \text{(ASA 全等)}.$$

又因為$\angle GHO = \angle MKL = x^{\circ}$, $\angle GOH = \angle MLK = y^{\circ}$, $\overline{HO} = \overline{KL} = c - \overline{OK}$,

所以

$$\Delta HGO \cong \Delta KML \text{(ASA 全等)}.$$

因為$\Delta OLN \cong \Delta ABC$且$\Delta HPK \cong \Delta ONL$，所以$\Delta HPK \cong \Delta ABC$，又因為$\overline{PK} = a = \overline{FM}$,

$\overline{KM} = \overline{PF} = \overline{DB} = a$，所以

$$\text{四邊形}PFMK\text{是面積為}a^2\text{的正方形。}$$

因為

$$\Delta HFL\text{面積} = \text{長方形}GFNO\text{面積} + \Delta HGO\text{面積} + \Delta ONL\text{面積，}$$

且

$$\Delta HFL\text{面積} = \text{正方形}PFMK\text{面積} + \Delta KML\text{面積} + \Delta HPK\text{面積，}$$

所以

長方形$GFNO$面積$+\Delta HGO$面積$+\Delta ONL$面積$=$正方形$PFMK$面積$+\Delta KML$面積$+\Delta HPK$面積，又$\Delta HGO \cong \Delta KML$，$\Delta HPK \cong \Delta ONL$，故

$$\text{長方形}GFNO\text{面積} = \text{正方形}PFMK\text{面積}。$$

5. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{平行四邊形}ABLO\text{面積}\\ &= \text{梯形}AGFB\text{面積} + \Delta ONL\text{面積} + \text{長方形}GFNO\text{面積}\\ &= \text{梯形}AGFB\text{面積} + \Delta ABC\text{面積} + \text{正方形}PFMK\text{面積}\\ &= \text{正方形}ACFG\text{面積} + a^2\\ &= \text{正方形}ACFG\text{面積} + \text{正方形}CBDE\text{面積}。\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自 Heath’s Mathematical Monographs, No.2, p.36, proof XXV.
2. 心得：此證明必須先證明$F-G-H$共線以及$E-D-K$共線，對國中學生來說比較不熟悉，不過接下來的證明只要利用全等關係與面積相等關係，就能推導出三個正方形的面積關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●