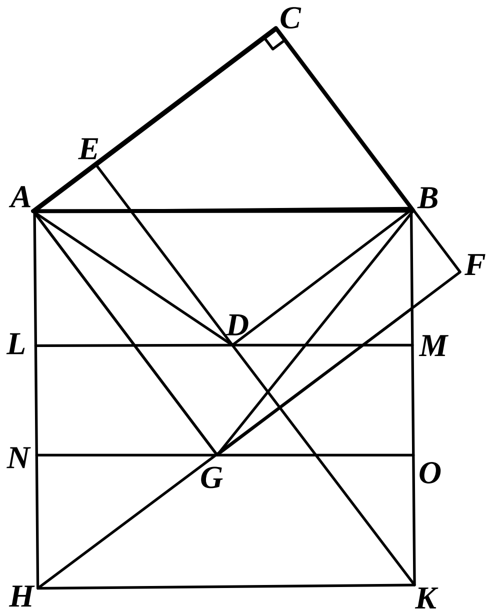
勾股定理證明-G144

【作輔助圖】

1. 分別以 $\overline{BC}$，$\overline{AC}$ 為邊長向內作正方形 $CBDE$ 和正方形 $ACFG$，再以 $\overline{AB}$ 為邊長向外作正方形 $ABKH$.
2. 過 D 點作與 $\overline{AB}$ 平行的直線，分別交 $\overline{AH}$，$\overline{BK}$ 於 L 點，M 點，再作過 G 點且與 $\overline{AB}$ 平行的直線，分別交 $\overline{AH}$，$\overline{BK}$ 於 N 點，O 點。
3. 連 $\overline{GH}$，$\overline{DA}$，$\overline{GB}$.



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊向內作正方形 $CBDE$ 與正方形 $ACFG$，向外作正方形 $ABKH$，證明正方形 $ABKH$ 所切割出的區塊中，長方形 $NOKH$ 的面積等於正方形 $CBDE$ 的面積，同時長方形 $ABON$ 的面積也與正方形 $ACFG$ 的面積相等，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明矩形 $NOKH$ 面積等於矩形 $ABRQ$ 面積：

因為 $\angle HAG + \angle GAB = 90^\circ = \angle HAG + \angle BAC$，所以 $\angle HAG = \angle CAB$，又 $\overline{AG} = \overline{AC} = b$，

$\overline{AH} = \overline{AB} = c$，可推得

$$\Delta AGH \cong \Delta ACB (\text{SAS 全等}),$$

即 $\angle AGH = \angle ACB = 90^{\circ}$。同理可證

$$\Delta KDB \cong \Delta ACB \text{ (SAS 全等)},$$

即 $\angle KDB = \angle ACB = 90^{\circ}$. ΔAGH 中，由母子相似性質知 $\overline{HN} \times \overline{HA} = \overline{GH}^2$，即

$\overline{HN} = \dfrac{\overline{GH}^2}{\overline{HA}} = \dfrac{a^2}{c}$；$\Delta KDB$ 中，由母子相似性質知 $\overline{BM} \times \overline{BK} = \overline{BD}^2$，即 $\overline{BM} = \dfrac{\overline{BD}^2}{\overline{BK}} = \dfrac{a^2}{c}$,

綜合以上可得

$$\overline{BM} = \overline{HN}.$$

故

$$\begin{aligned} \text{長方形}NOKH\text{面積} &= \overline{HN} \times \overline{NO} \\ &= \overline{BM} \times \overline{AB} \\ &= \text{長方形}ABML\text{面積。} \end{aligned}$$

2. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned} \text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{長方形}ABON\text{面積} + \text{長方形}NOKH\text{面積} \\ &= \text{長方形}ABON\text{面積} + \text{長方形}ABML\text{面積} \\ &= 2\Delta GAB\text{面積} + 2\Delta ADB\text{面積} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{GF} + 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{DE} \\ &= \overline{AG} \times \overline{GF} + \overline{BD} \times \overline{DE} \\ &= \text{正方形}ACFG\text{面積} + \text{正方形}CBDE\text{面積。} \end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：

Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 383.

2. 心得：此證明是利用面積的轉換，將大正方形 *ABKH* 的面積轉換成長方形 *ABON* 的面積與長方形 *ABML* 的面積，其中長方形 *ABML* 的面積為何與長方形

NOKH 的面積相等，並不直觀，必須要思考一下才能證明出來。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	