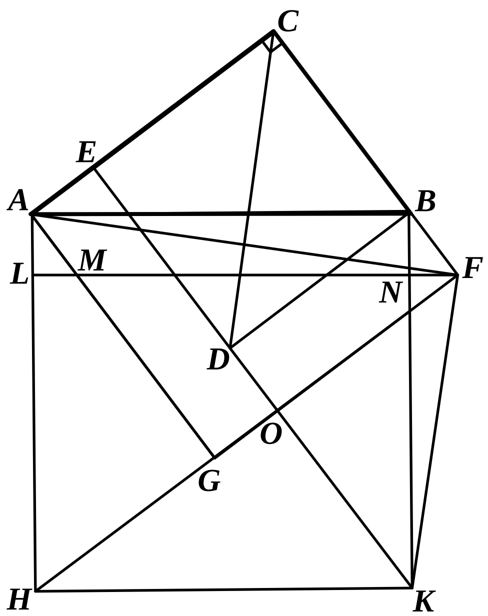
勾股定理證明-G143

【作輔助圖】

1. 分別以$\overline{BC}$，$\overline{AC}$為邊長向內作正方形$CBDE$和正方形$ACFG$，再以$\overline{AB}$為邊長向外作正方形$ABKH$。
2. 過F點作與$\overline{AB}$平行的直線，分別交$\overline{AH}$，$\overline{AG}$，$\overline{BK}$於L點，M點，N點。
3. 連$\overline{CD}$，$\overline{DG}$，$\overline{GH}$.
4. 連$\overline{DK}$交$\overline{FG}$於O點。
5. 連$\overline{AF}$，$\overline{FK}$.



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊向內作正方形$CBDE$與正方形$ACFG$，向外作正方形$ABKH$，證明正方形$ABKH$所切割出的所有區塊面積總和等於正方形$CBDE$的面積加上正方形$ACFG$的面積，最後推出勾股定理的關係式。

1. 證明三角形AGH與三角形ACB全等進而推得$F-G-H$共線：

因為$\angle HAG+\angle GAB=90^{\circ}=\angle HAG+\angle BAC$，所以$\angle HAG=\angle CAB$，又$\overline{AG}=\overline{AC}=b$,

$\overline{AH}=\overline{AB}=c$，可推得

$$\Delta AGH\cong\Delta ACB(\text{SAS 全等}),$$

即$\angle AGH = \angle ACB = 90^\circ$，故

$$F-G-H\text{共線。}$$

2. 證明三角形KDB與三角形ACB全等進而推得$E-D-K$共線：

因為$\angle KBD + \angle ABD = 90^\circ = \angle CBA + \angle ABD$，所以$\angle KBD = \angle CBA$，又$\overline{BD} = \overline{BC} = a$

$\overline{BK} = \overline{BA} = c$，可推得

$$\Delta KDB \cong \Delta ACB \text{(SAS 全等)},$$

即$\angle KDB = \angle ACB = 90^\circ$，故

$$E-D-K\text{共線。}$$

3. 證明三角形MGF與三角形KOH全等：

因為$\angle MFG = \angle OHK$，$\angle MGF = \angle HOK = 90^\circ$，$\overline{MF} = \overline{HK} = c$，所以

$$\Delta MGF \cong \Delta KOH \text{ (AAS 全等)}.$$

4. 證明三角形MGF與三角形BCA全等：

因為$\overline{FG} = \overline{CA}$，$\overline{MF} = \overline{AB}$，$\angle FGM = \angle ACB = 90^\circ$，所以

$$\Delta MGF \cong \Delta BCA \text{(RHS 全等)}.$$

5. 利用第 3 點和第 4 點推得三角形KOH與三角形BCA皆和三角形MGF全等：
因為$\Delta MGF \cong \Delta KOH$，$\Delta MGF \cong \Delta BCA$，所以

$$\Delta MGF \cong \Delta KOH \cong \Delta BCA.$$

6. 證明三角形FOK與三角形DBC全等：

因為$\overline{FO} = \overline{BD}$，$\overline{FK} = \overline{CD}$，$\angle FOK = \angle CBD = 90^\circ$，所以

$$\Delta FOK \cong \Delta DBC \text{(RHS 全等)}.$$

7. 最後利用面積關係推出勾股定理的關係式：

$$\begin{aligned}
\text{正方形}ABKH\text{面積} &= \text{長方形}ABNL\text{面積} + \text{長方形}LNKH\text{面積} \\
&= \text{平行四邊形}AMFB\text{面積} + 2\Delta HKF\text{面積} \\
&= \text{平行四邊形}AMFB\text{面積} + 2\Delta KOH\text{面積} + 2\Delta FOK\text{面積} \\
&= \text{平行四邊形}AMFB\text{面積} + (\Delta MGF\text{面積} + \Delta BCA\text{面積}) \\
&\quad + 2\Delta DBC\text{面積} \\
&= (\text{平行四邊形}AMFB\text{面積} + \Delta MGF\text{面積} + \Delta BCA\text{面積}) \\
&\quad + 2\Delta DBC\text{面積} \\
&= \text{正方形}ACFG\text{面積} + \text{正方形}CBDE\text{面積。}
\end{aligned}$$

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下期刊：
   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *5*(3), 74.
2. 心得：此證明是利用面積的轉換，需要證明多個圖形之間的面積相等關係以及全等關係。此證明作圖並不複雜，但是證明過程必須耐心地一步一步推導，才能得到三個正方形的關係。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	