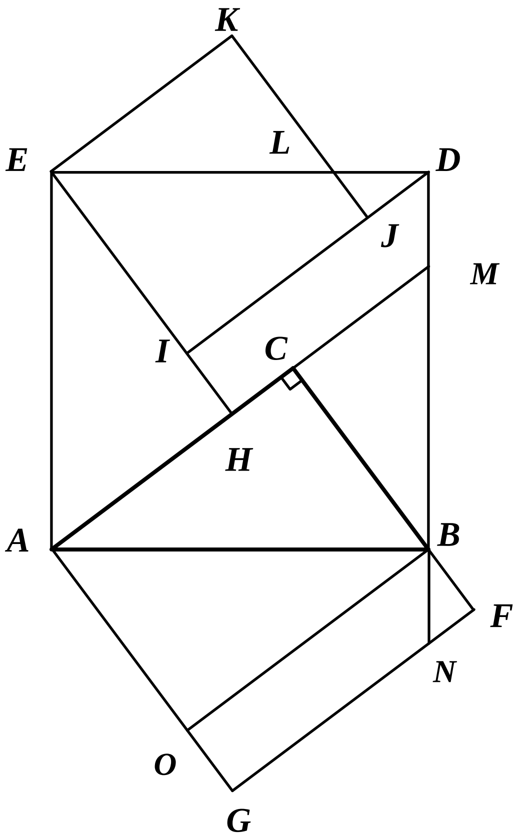
勾股定理證明-華蘅芳 15

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊，向內作正方形 $ABDE$ ；再以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作正方形 $ACFG$ 。
2. 接著過 E 作 $\overline{AC}$ 的垂直線，交 $\overline{AC}$ 於 H 。
3. 然後過 D 作 $\overline{EH}$ 的垂直線，交 $\overline{EH}$ 於 I ，再以 $\overline{EI}$ 為邊向外作正方形 $EIJK$ (如圖所示)，其中 $\overline{KJ}$ 與 $\overline{DE}$ 交於 L 。
4. 並延伸 $\overline{AC}$ 交 $\overline{BD}$ 於 M ，接著延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{GF}$ 於 N 。
5. 最後過 B 作 $\overline{AG}$ 的垂直線，交 $\overline{AG}$ 於 O 。



【求證過程】

以上輔助圖中，大正方形被輔助線切割成六塊拼片，不難證明這六塊拼片與兩個小正方形內的拼片對應全等，因此可以以這六塊拼片拼得兩個小正方形。再利用面積等式的推導，即可得到畢氏定理的關係式。

1. 首先我們證明 $\Delta ABC, \Delta BAO, \Delta EAI, \Delta DEI$ 為全等的直角三角形：

   其中我們先證明 $\Delta ABC \cong \Delta BAO$ ，是因為

$$\overline{AB} = \overline{BA} (\because \text{共用邊}),$$

   而且

$$\angle ABC = 90^{\circ} - \angle ABO = \angle BAO,$$

   以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle BOA,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BAO \text{ (AAS 全等)；}$$

再看 $\Delta ABC \cong \Delta EAH$ ：

因為有

$$\overline{AB} = \overline{AE} (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\angle CBA = 90^\circ - \angle CAB = \angle EAH,$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle EHA,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta EAH \text{ (AAS 全等)；}$$

接著看 $\Delta EAH \cong \Delta DEI$ ：

因為

$$\overline{EA} = \overline{DE} (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\angle AEH = 90^\circ - \angle DEI = \angle EDI,$$

以及

$$\angle EHA = 90^\circ = \angle DIE,$$

所以可以推得

$$\Delta EAH \cong \Delta DEI \text{ (AAS 全等)；}$$

因此我們就完成證明得到

$$\Delta ABC \cong \Delta BAO \cong \Delta EAI \cong \Delta DEI.$$

2. 不難證明 $\Delta BMC, \Delta ELK$ 的全等：

因為

$$\overline{BC} = \overline{EI} = \overline{EK} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\angle MCB = 90^\circ = \angle LKE,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBM &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle EAH (\because \Delta ABC \cong \Delta EAH) \\ &= \angle AEH \\ &= 90^\circ - \angle DEH \\ &= \angle KEL,\end{aligned}$$

所以可以推得

$$\Delta BMC \cong \Delta ELK \text{ (ASA 全等).}$$

3. 接著要證明$\Delta LDJ, \Delta NBF$的全等：

因為

$$\begin{aligned}\overline{DJ} &= \overline{DI} - \overline{JI} \\ &= \overline{AC} - \overline{EI} (\because \text{正方形的邊而且} \Delta DEI \cong \Delta ABC) \\ &= \overline{CF} - \overline{CB} (\because \text{正方形的邊而且} \Delta DEI \cong \Delta ABC) \\ &= \overline{BF},\end{aligned}$$

而且

$$\angle LJD = 90^\circ = \angle BFN,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle LDJ &= 90^\circ - \angle DLJ \\ &= 90^\circ - \angle ELK (\because \text{對頂角}) \\ &= 90^\circ - \angle CMB (\because \Delta ELK \cong \Delta BMC), \\ &= \angle MBC \\ &= \angle FBN (\because \text{對頂角}),\end{aligned}$$

所以可以推得

$$\Delta LDJ \cong \Delta NBF \ (\text{ASA 全等}).$$

4. 最後一塊拼片我們以五個條件證明四邊形$OGNB \cong$四邊形$IHMD$：

因為

$$\overline{OB} = \overline{ID} (\because \Delta BAO \cong \Delta DEI),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{OG} &= \overline{AG} - \overline{AO} \\ &= \overline{AC} - \overline{EI} (\because \text{正方形的邊而且} \Delta BAO \cong \Delta DEI) \\ &= \overline{EH} - \overline{EI} (\because \Delta ABC \cong \Delta EAH) \\ &= \overline{IH},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle OBN &= 90^\circ - \angle NBF \\ &= 90^\circ - \angle LDJ (\because \Delta NBF \cong \Delta LDJ) \\ &= \angle IDM,\end{aligned}$$

和

$$\angle MHI = \angle HID = 90^\circ = \angle NGO = \angle GOB,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形} OGNB \cong \text{四邊形} IHMD \ (\text{ASASA 全等}).$$

5. 綜合以上拼片對應全等的證明，以下我們從面積等式推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BCM + HIDM + \Delta LDJ + ELJI + \Delta EAH \\ &= \Delta ABC + \Delta EKL + GOBN + \Delta NBF + ELJI + \Delta BAO \\ &= (\Delta ABC + \Delta BAO + GOBN + \Delta NBF) + (ELJI + \Delta EKL) \\ &= \square ACFG + \square EJIK,\end{aligned}$$

即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。
   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。